Atelier C 23

Trouvera-t-on une preuve du Théorème des 4 couleurs sans ordinateur ?

Jacqueline Zizi

Après plus de 10 ans de durs labeurs et des preuves qui se sont révélées fausses par la suite, la "bête" a fini par céder, il y a un peu plus d'une vingtaine d'années (en 1976), et jusqu'à preuve du contraire, à la rigueur de l'ordinateur. Facile à comprendre, le problème est délicat à résoudre et bien malin serait celui qui (à part les auteurs du programme informatique et encore...) en déroulerait à la main tous les dédales et pourrait répondre à toutes les questions posées à ce sujet. Je me suis donc contentée d'exposer le problème et ses diverses approches. Cas particulier d'un vaste champ en pleine effervescence aux mille et une applications dans tous les domaines scientifiques, n'est-il pas aussi le premier représentant d'une nouvelle race de théorèmes, à savoir ceux que l'on ne peut pas démontrer "à la main"?

I) Le problème initial et ses différentes approches

1) Le problème initial

Prendre une carte géographique de forme quelconque, colorier deux régions ou pays voisins (adjacents) par des couleurs différentes, remarquer qu'alors 4 couleurs suffisent, quelle que soit la carte et les pays ou régions concernées, c'est être dans le vif du problème, tel qu'il s'est posé historiquement à Francis Guthrie en 1852.

2) Sa modélisation par un graphe

Afin de modéliser le problème et en particulier de s'affranchir des formes des régions, en 1931, Whitney eu l'idée d'associer à chaque région, un point du plan et lorsque 2 régions sont adjacentes, de relier les points correspondants du plan, formant ainsi un graphe (voir figure 1). On associe donc à un problème de coloration de carte géographique, un problème de coloration des sommets d'un graphe, 2 sommets reliés n'étant pas coloriés avec la même couleur.

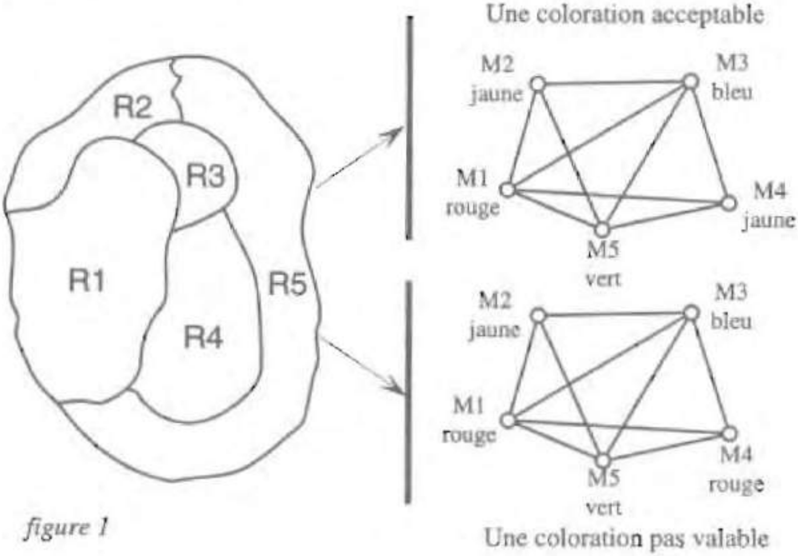


figure 1

Une propriété importante est que tous les graphes (et donc tous les problèmes de coloration de graphes) ne sont pas forcément associés à un problème de carte. Par exemple, le graphe gauche de la figure 2 ne correspond à aucune carte. On a en effet montré que les graphes associés aux cartes ont la propriété d'être *planaires*. Ceci, par définition, veut dire que les arêtes ne se coupent pas ou plus exactement qu'on ne peut pas faire subir une transformation qui décroiserait le graphe. Par exemple, on a décroisé le graphe de la figure 1 en le graphe de droite de la figure 2.

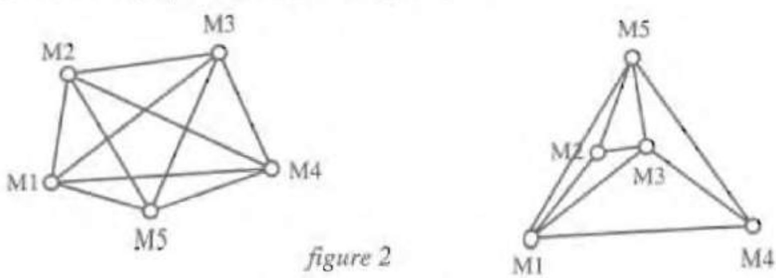


figure 2

3) L'approche par les chaînes de Kempe.

Personne n'ayant donné de preuve correcte pendant de nombreuses années à cette conjecture, Cayley la publia dans les "Proceedings of the London Mathematical Society" en 1878. Un an après, Kempe publia une "preuve" et devint ainsi très célèbre. D'autres preuves basées sur d'autres raisonnements furent alors publiées dans les années suivantes, en particulier par Tait.

Le principe du raisonnement est une récurrence. Pour plus de simplicité, nous allons en suivre les idées en utilisant la modélisation par un graphe mais à l'époque de Kempe, ce n'était pas connu. Pour le passage de l'ordre n-1 à l'ordre n, on s'appuie sur la propriété suivante des graphes planaires: "il existe au moins un sommet d'ordre inférieur ou égal à 5", c'est-à-dire relié à au plus 5 autres sommets. De façon plus précise, on considère ce sommet, soit M (dans notre exemple de la figure 1, tous les sommets ont cette propriété, on prend donc pour M celui qu'on veut) et on étudie les différents cas possibles (ordre 1, il est relié à un sommet, ordre 2, il est relié à 2 sommets, etc.). Sachant que par hypothèse de récurrence on a une coloration avec 4 couleurs pour les n-1 autres sommets restants, il est évident que si le sommet est d'ordre 1, 2 ou 3, on peut toujours lui attribuer une couleur sur les 4 autorisées, en choisissant une couleur parmi celles qui ne sont pas attribuées aux sommets voisins (auxquels il est relié). A partir de l'ordre 4 c'est plus délicat car les 4 couleurs peuvent déjà être prises par les 4 voisins. Que faire dans ce cas (figure 3 à gauche)?

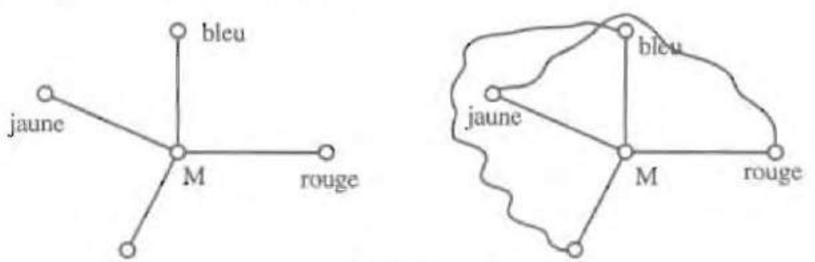
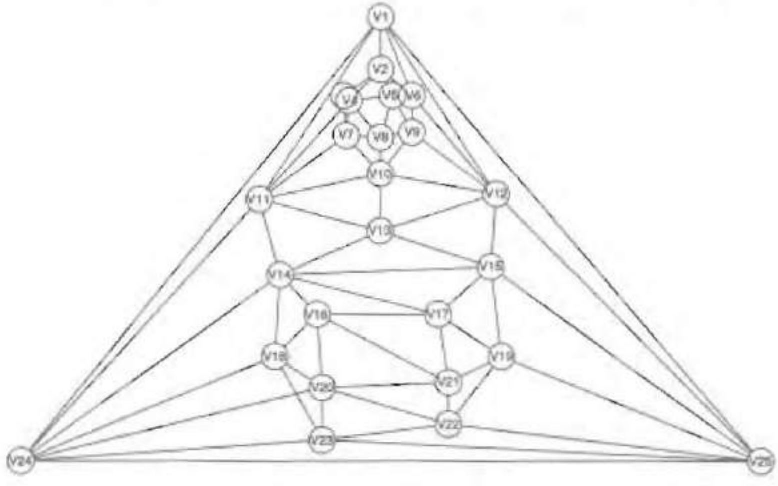


figure 3

L'idée consiste à enlever une des couleurs aux voisins de M pour la lui donner. Pour cela Kempe considère tous les sommets verts et bleus du graphe, d'une part et tous les sommets rouge et jaune d'autre part. Puisque le graphe est planaire, il ne peut pas exister à la fois une chaîne (suite de sommets reliés v-b) allant du voisin vert de M au voisin bleu de M et une chaîne j-r, allant du voisin rouge au voisin jaune. Donc on peut donner par exemple à M la couleur bleue si vert et bleu ne sont pas reliés; on colorie alors les deux voisins de M en vert. Kempe procède de même dans le cas où M est d'ordre 5. Ces chaînes sont appelées chaînes de Kempe.

Mais, 11 années plus tard, Heawood donnait l'exemple d'un graphe à 25 sommets qui apportait un contre exemple à la méthode de Kempe. En même temps, en utilisant toujours l'idée des chaînes de Kempe, il montra le théorème des 5 couleurs. On était sur la bonne voie... L'année suivante, Petersen montra que la preuve donnée par Tait était fausse. De nombreuses équivalences, réductions et généralisations furent alors énoncées; des résultats relatifs ont été montrés, d'autres ont cru l'être et se sont révélés faux ensuite. Il fallut attendre 1976 pour que soit publié par Appel et Haken un article affirmant le résultat vrai. Une bonne partie théorique pour cerner les cas à étudier, et beaucoup de calculs effectués par ordinateur: impossible de vérifier tout "à la main". Le nombre de cas étudié, initialement 1936, fut réduit à 1870. Des erreurs ont été trouvées depuis, mais elles ont ensuite été corrigées. Les auteurs travaillent toujours à l'amélioration de leur démonstration, pendant que d'autres personnes sceptiques voient diminuer les chances de trouver un contre exemple car le nombre de sommets d'un tel contre-exemple a été démontré supérieur ou égal à 26, puis 28, puis 32, puis 36, puis 40 (il fallut attendre 20 ans pour passer de 36 à 40), puis 52 puis 96.



Le graphe de Heawood

4) L'approche par les polynômes chromatiques

En 1912, Birkhoff initia un autre chemin en associant à un graphe quelconque (pas forcément planaire) un polynôme dit polynôme chromatique de degré égal au nombre de sommets du graphe. Ce polynôme $P(x)$ est le nombre de façons de colorier un graphe lorsque l'on se donne x couleurs. La plus petite valeur entière de x pour laquelle $P(x)$ est positif, appelé nombre chromatique est alors le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier le graphe. Une voie de démonstration du théorème des 4 couleurs consiste à calculer le polynôme chromatique et à montrer que pour les graphes planaires, le nombre chromatique est 4. Encore aujourd'hui on connaît peu de chose sur les polynômes chromatiques et sur leurs racines, les calculs à la main étant inextricables, même si un certain nombre de résultats théoriques ont été établis.

Il se trouve que ces polynômes sont des cas particuliers de polynômes de Tutte qui a consacré une très grande partie de sa vie à leur étude. A la demande d'Olivier Mathieu, spécialiste en théorie des groupes, j'ai commencé par essayer d'optimiser un programme qu'il avait écrit en Maple avec un autre mathématicien pour résoudre une conjecture, qui s'énonce simplement dans le cas très particulier des polynômes chromatiques, ainsi : chercher les racines du polynôme chromatique, prendre celles de plus grand module. Existe-t-il parmi elles toujours une racine réelle ? Pour des raisons techniques et surtout conceptuelles, j'ai repris le programme en Mathematica et j'ai pu montrer que la conjecture était fausse, ce qui bien évidemment donne à un plus haut niveau d'abstraction une direction de recherche. C'est ainsi que j'ai commencé à m'intéresser à ces questions. Actuellement j'ai écrit un programme (toujours en cours de construction mais déjà opérationnel) qui permet une bonne exploration de ce domaine et plus généralement des graphes. Je tiens à disposition des personnes intéressées un article décrivant ses principales fonctionnalités ainsi que les résultats que j'ai déjà obtenus pour le moment sur ce sujet.

II) Utilisation dans nos classes

Au congrès Math en Jeans de 1994, nous avions décidé de faire des exposés en réponse aux questions des élèves. Parmi les questions, il y avait, entre autres: "Théorème des 4 couleurs", *ce qui prouve tout simplement que la relève 94 était curieuse de ces choses là.*

Certains aspects de la coloration des graphes sont très simples, d'autres plus délicats, c'est pourquoi, cette année, je n'ai pas hésité à donner dans le cadre de l'association Math en Jeans 4 sujets d'apparence complètement différente mais convergeant autour de ce thème.

Un premier sujet soumettait un partage d'une planète inconnue. En projetant dans un plan, on aurait pu se ramener au problème de coloration de graphe, mais les élèves ont pris un autre chemin que nous avons respecté, ce qui montre toute la difficulté de donner des sujets sortant des sentiers battus et pouvant tenir en haleine des élèves une année scolaire.

Un deuxième sujet était directement concerné par le dénombrement des colorations de graphes. Il y avait le balai de la sorcière, l'éventail, la tortue, et Chromo-Sapiens, personnage imaginaire portant à la main une enveloppe mystérieuse. Les petits élèves de 6ème et ceux de 4ème qui ont travaillé sur ce sujet se sont taillés un joli succès lors du congrès de Math en Jeans car ils ont aimé chercher et ils ont bien travaillé. Ils ont moins aimé se tromper surtout que ce sont les petits 6ème qui ont attiré l'attention sur les erreurs de raisonnement des 4ème, avant de faire eux mêmes la même erreur. Mais, une fois corrigées toutes ces erreurs, ils étaient fiers de leurs résultats, et ils pouvaient l'être. En effet, Chromo Sapiens a un polynôme de degré 43 qui n'est pas simple du tout !

Le troisième sujet était une famille de polynômes dont il fallait trouver s'ils pouvaient correspondre à quelque graphe. Ceux qui ont travaillé sur ce sujet (élèves de 4ème) ignoraient tout d'un polynôme en début d'année, mais ils ont fait très fort ensuite. Les voir faire a été en tout cas très révélateur de leur approche.

Le dernier sujet était une histoire électorale avec une gestion difficile de salles et de réunions. Les premières solutions trouvées l'ont été en confectionnant des tableaux. Ensuite, ils ont été tout contents de retrouver leurs résultats par coloration de graphes.

Ce qui prouve tout simplement que la relève 98 est bien partie et que tout espoir de répondre positivement à la question n'est peut-être pas complètement perdu...

Bibliographie

Thomas L.Saaty and Paul C. Kainen *The four-color problem* Dover Publications 0-486-65092-8

Actes de l'association Math en Jeans - 1994, Exposé de Jacqueline .Zizi.

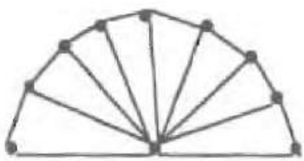
Actes de l'association Math en Jeans - 1998, à paraître (collèges André Doucet (4ème) et Paul Eluard (6ème) à Nanterre.)

Norman Biggs *Algebraic Graph Theory*, Cambridge Mathematical Library

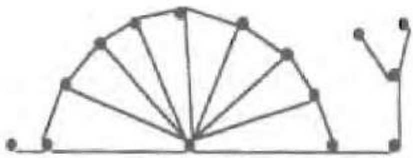
Gondran et Minoux - *Graphes et algorithmes*.

le balai de la sorcière

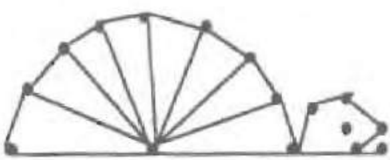
L'éventail



L'escargot



la tortue



Chromo sapiens et son
enveloppe secrète