Atelier C 22

Les démonstrations de l'Axiome d'Euclide

La théorie des parallèles

Jacques Verdier
Régionale de Lorraine

> *Par un point donné (extérieur à une droite) on peut mener une (et une seule) parallèle à cette droite.*

La formulation ci-dessus n'est pas due à EUCLIDE, mais à l'Anglais John PLAYFAIR, au XVIIIe siècle. Elle est équivalente à celle d'EUCLIDE que voici, mais cela n'a été démontré que plus tard : *Si une droite, tombant sur deux droites, fait [la somme des] angles intérieurs plus petite que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où [la somme de ces angles] est plus petite que deux droits* (Éléments, livre 1, «Demandes»).

L'atelier a consisté en une présentation des avatars de la formulation d'EUCLIDE d'une part, et des tentatives de démonstration de cet axiome dont les mathématiciens ont cru, pendant des siècles, que ce devait être un théorème qu'EUCLIDE n'avait placé là que parce qu'il n'avait pas su le démontrer.

Il est impossible, dans un aussi bref article, de résumer cette histoire. Aussi je me contenterai de donner quelques unes des pistes évoquées, ainsi qu'une bibliographie commentée.

Les 28 premières propositions des Éléments d'EUCLIDE n'utilisent pas ce fameux axiome (ou postulat), et forment ce qu'on appellera plus tard la «géométrie absolue»; à partir de sa 29ème proposition, EUCLIDE en a eu besoin. Très tôt, des mathématiciens grecs plus ou moins connus comme POSIDONNIUS, PTOLEMEE, PROCLUS, GEMENIUS, AGANIS, etc. ont essayé de démontrer cet axiome (certains même en modifiant la définition de la droite donnée par EUCLIDE).

A partir du IX^e siècle, les mathématiciens arabes, commentateurs des Grecs, prirent le relais : AL GAUHARI, AN NAYRIZI, TABIT IBN QURRA, AL HAYTAM, AL KHAYYAM, AL TUSI... L'idée d'AL HAYTAM, par exemple, a été de démontrer que si trois angles d'un quadrilatère étaient droits, le quatrième l'était nécessairement, ce qui avait pour conséquence la véracité du 5ème postulat. Il le supprimait alors de la liste des axiomes et le replaçait alors juste avant la 29ème proposition des Éléments. Umar AL KHAYYAM a utilisé une démarche semblable, mais en démontrant, lui, que si on construisait perpendiculairement aux extrémités d'un segment donné deux segments de même longueur, on obtenait un rectangle.

Au XVII^e et au XVIII^e siècle, l'Anglais John WALLIS et le Français André-Marie LEGENDRE (de deux façons), avec de tout autres outils, ont cru eux aussi avoir réussi cette démonstration ; mais il y avait toujours une erreur dans les raisonnements (erreur très difficile à déceler pour les profanes que nous sommes, tellement nous sommes habitués à travailler dans un monde euclidien) !

Les premiers à franchir un grand pas (au point de vue épistémologique) ont été l'Italien Girolamo SACCHERI (1667-1733) et l'Alsacien Johann-Heinrich LAMBERT (1728-1777). Ils ont repris le premier une démarche analogue à celle d'Umar AL KHAYYAM (mais dont l'œuvre n'était pas connue à cette époque), le second une démarche semblable à celle d'AL HAYTAM, mais ils ont commencé à énoncer les conséquences des résultats qu'ils obtenaient en niant l'axiome d'EUCLIDE : en réalité, ils espéraient aboutir à une contradiction. Mais les résultats qu'ils obtenaient, bien que parfaitement cohérents, étaient difficilement acceptables à cette époque. Par exemple *«il n'existe pas de triangles semblables»* ou *«L'ensemble des points équidistants d'une droite donnée n'est pas une droite»*. Tous les deux, à la fin, ont fini par «craquer» !

> *[Cette hypothèse] est absolument fausse, car elle répugne à la nature même de la ligne droite.*
>
> *G. SACCHERI*

Les trois premiers mathématiciens qui ont «osé» aller jusqu'au bout des conséquences de cette négation de l'axiome d'EUCLIDE furent Janos BOLYAI, Nocolaï Ivanovitch LOBATCHEVSKI et Friedrich GAUSS, entre les années 1805 et 1835 (les trente glorieuses). Ils ont construit une géométrie qui n'a pas du tout les propriétés que l'on trouve dans la géométrie euclidienne, mais qui n'est ni plus vraie ni plus fausse (cette notion n'ayant aucun sens). Et l'on sait les développements qu'a permis, près d'un siècle plus tard, leur démarche.

A lire sur ce sujet :

• Amy DAHAN-DALMEDICO & Jeanne PEIFFER, *Une histoire des mathématiques : routes et dédales* (Éditions du Seuil, Collection Points, 1986) et en particulier le chapitre 4.11 consacré aux géométries non euclidiennes. Cet excellent ouvrage, vu son très faible prix, devrait se trouver sur le bureau de tout professeur de mathématiques.

• *La vraie-fausse démonstration du cinquième postulat*, chapitre rédigé par Jean-Luc CHABERT dans *Histoire de problèmes, histoire des mathématiques*, ouvrage de la Commission Inter-IREM Épistémologie et Histoire, publié chez Ellipses en 1993.

• *Les géométries non euclidiennes*, un article de Jean-Luc CHABERT dans le premier numéro de la revue REPÈRES (la revue des IREM), éditions Topiques, 1990.

• Un article de Guy NOËL dans la revue de la Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française, *Mathématique et Pédagogie* (n° 68, 1988) : «*Les rectangles existent-ils ?*».

• La «suite de l'histoire» dans le compte rendu de la conférence de Jean-Pierre BOURGUIGNON aux Journées de STRASBOURG : *Les géométries non euclidiennes 200 ans après la naissance de Lobatchevski* (Bulletin APMEP n°389, juin 1993).

• *La théorie des parallèles*, chapitre rédigé par Jean-Pierre FRIEDELMEYER et Klaus VOLKERT dans les actes de la 6ème Université d'Été Interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques (IREM de BESANÇON, 1995).

• On pourra compléter ces lectures par *Mathématiques au fil des âges*, de Jean DHOMBRES et al. (Gauthier-Villars, 1987) et par *Les mathématiques Arabes* , d'Adolf P. YOUSKEVITCH (traduit du Russe, éditions VRIN, 1976), ce dernier étant plus touffu et plus austère.