Atelier B 19

L'espérance de vie des frères Huygens[1]

Bernard Parzysz
IUFM et IREM de Lorraine - Université de Metz

Le 22 août 1669, Louis Huygens envoie d'Amsterdam à son frère Christian (qui séjourne alors à Paris, à l'invitation de Louis XIV) copie d'une table de mortalité -la première jamais publiée- éditée en 1662 à Londres par John Graunt[2] :

Sur 100 individus, il meurt pendant les six premières années		*36*
les dix années suivantes ou (1re) décennie		*24*
la 2e décennie		*15*
la 3e décennie		*9*
la 4e décennie		*6*
la suivante		*4*
la suivante		*3*
la suivante		*2*
la suivante		*1*
Il s'ensuit que, sur ces 100 individus conçus, il en survit		
au bout de	*6 ans*	*64*
	16 ans	*40*
	26 ans	*25*
	36 ans	*16*
	46 ans	*10*
	56 ans	*6*
	66 ans	*3*
	76 ans	*1*
	86 ans	*0*

[1] Les textes des frères Huygens et de Graunt ici cités, ainsi que les renseignements historiques, sont extraits de "*L'invention de la table de mortalité*", par Jacques Dupâquier, PUF 1996 (coll. Sociologies)

[2] *Natural & Political Observations upon the Bills of Mortality of the City of London.*

A cette occasion, il lui lance un défi mathématique :

La question est: jusqu'à quel âge doit vivre naturellement un enfant aussitôt qu'il est conçu (...). Si vous y trouvez de la difficulté ou trop d'embarras, je m'offre à vous faire part de ma méthode, qui est assurée, par la première occasion.

Et, dans le but de l'intriguer, il termine en lui disant: "*Selon mon calcul, vous vivrez environ jusqu'à l'âge (de) 56 ans et demi. Et moi jusqu'à 55*".

Une correspondance s'engage alors entre les deux frères, qui va durer plusieurs mois. Christian, dans sa réponse à Louis (lettre du 28.8.1669), emploie le langage des jeux de hasard, ce qui n'est guère étonnant (rappelons que son "*Ratiociniis in aleæ ludo*" date de 1657):

> *Ce que je puis conclure de certain par les données de la table, c'est que qui gagerait qu'un enfant nouveau-né (ou conçu, comme vous dites (...)*[3]*) vivra à 16 ans, prendrait le mauvais parti et hasarderait 4 contre 3. De même, qui gagerait qu'une personne de 16 ans vivra jusqu'à 36, il hasarde tout de même 4 contre 3.*

En fait, il commence par se borner à constater que, d'après la table, 40 enfants conçus sur 100 (soit 2 sur 5) atteignent l'âge de 6 ans, et 16 personnes de 16 ans sur 40 (soit également 2 sur 5) atteignent l'âge de 36 ans. Il faut donc, sans aucun doute, lire "2 contre 3" au lieu de "4 contre 3"[4]. Mais ce qu'il faut surtout retenir, c'est qu'il semble considérer comme allant de soi de passer des données statistiques aux chances de survie d'un individu (n'oublions pas que les probabilités sont tout juste naissantes, et que la distinction fréquence / probabilité ne sera réellement établie qu'à la fin du 18e siècle). C'est d'ailleurs exactement ce que font encore aujourd'hui les compagnies d'assurances, qui utilisent elles aussi des tables de mortalité pour calculer le montant des primes d'assurance-vie.

Christian ne répond donc pas à la question qui lui était posée, ce qui fait que Louis (lettre du 30.10.1669) lui expose sa méthode de résolution. Faute de données plus précises, il commence par concentrer chaque classe de la distribution des âges en son centre : "*les 36 personnes qui meurent au-dessous de 6 ans ont vécu l'une portant l'autre 3 ans (...), les 24 qui meurent entre 6 et 16 ont vécu l'un(e) portant l'autre 11 ans*", etc. Puis il additionne les âges vécus par l'ensemble des 100 personnes, et divise par 100, obtenant ainsi ce que nous appelons aujourd'hui l'espérance de vie à la naissance:

---

[3] Graunt présente en effet sa table en disant "*que, sur 100 individus conçus et animés, 36 environ meurent avant l'âge de 6 ans et peut-être un seul est survivant à 76 ans*".

[4] Christian lui-même donnera le bon rapport dans le texte "*En examinant le calcul de mon frère Louis*", cité plus loin.

Je compte premièrement les années que toutes ces 100 personnes ensemble doivent avoir vécu, qui font en tout 1 822 années, ce que vous verrez prouvé dans la page qui suit.

Les 36 personnes qui meurent au-dessous de 6 ans ont vécu l'une portant l'autre 3 ans, qui fait	*108ans*
Les 24 qui meurent entre 6 et 16 ont vécu l'un portant l'autre 11 ans, qui fait	*264*
Les 15 qui meurent entre 16 et 26 ont vécu 21 ans, qui fait	*315*
les 9 entre 26 et 36 ont vécu 31 ans, qui fait	*279*
les 6 entre 36 et 46 ont vécu 41 ans, qui fait	*246*
les 4 entre 46 et 56 ont vécu 51 ans, qui fait	*204*
les 3 entre 56 et 66 ont vécu 61 ans, qui fait	*183*
les 2 entre 66 et 76 ont vécu 71 ans, qui fait	*142*
Et l'un qui meurt entre 76 et 86 a vécu 81 ans	*81*
Somma	*1 822 ans*

Ces 1 822 ans partagés également entre 100 personnes il vient pour chacun 18 ans et environ 2 mois, qui est l'âge de chaque personne créée ou conçue, l'une portant l'autre.

Il reprend ensuite ce procédé sur l'ensemble des personnes ayant vécu au moins 6 ans, obtenant de même l'âge moyen du décès pour ces personnes; il en déduit alors, en lui retranchant 6 ans, l'espérance de vie à 6 ans, et ainsi de suite:

...ce qui fait (...) pour chaque enfant de 6 ans, 26 ans et environ 10 mois, de sorte qu'il leur reste encore à vivre au susdit âge de 6 ans, 20 ans et 10 mois. (...) ce qui fait (...) pour chaque personne de 16 ans, 36 ans et 3 mois, de sorte qu'il leur reste de vie 20 ans 3 mois.

Pour ceux de 26 il viendra 45 ans 4 mois, ou pour leur reste	*19.*	*4.*
Pour ceux de 36, 53 ans 6 mois; pour leur reste	*17.*	*6.*
Pour ceux de 46, 61 ans. Pour leur reste	*15.*	*0.*
Pour ceux de 56, 67 ans et 8 mois. Pour leur reste	*11.*	*8.*
Pour ceux de 66, 74 ans 4 mois. Pour leur reste	*8.*	*4.*
Pour ceux de 76, 81 ans. Pour leur reste	*5.*	*0.*
Pour ceux de 86, rien	*0.*	

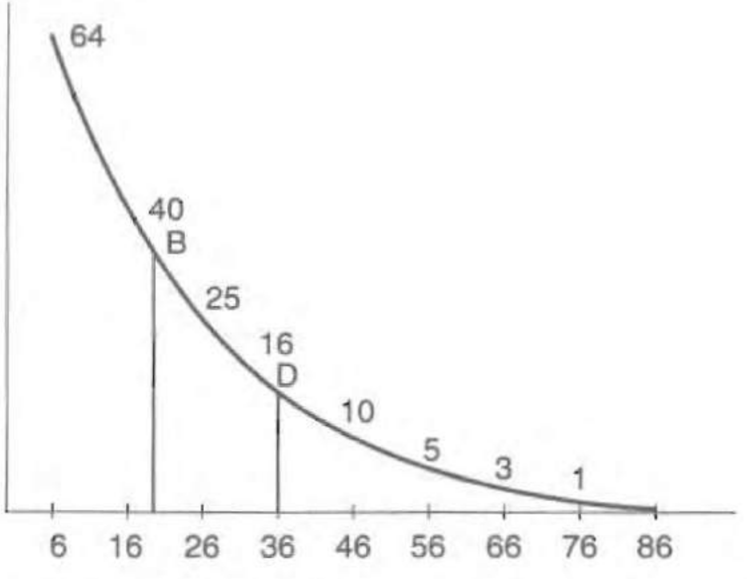
Nous pouvons ici nous poser la question (et tenter d'y répondre): Comment Louis a-t-il procédé pour déterminer que Christian vivrait jusqu'à l'âge de 56 ans 1/2 ?

En 1669, Christian (né en 1629) est âgé de 40 ans. Or, d'après les calculs de Louis (cf ci-dessus), une personne de 36 ans peut escompter vivre jusqu'à 53 ans 1/2, tandis qu'une personne de 46 ans peut escompter vivre jusqu'à 61 ans. Une interpolation linéaire entre ces deux bornes donne une espérance de vie de $53{,}5 + (61 - 53{,}5) \times 0{,}4$, soit 56,5. Ce qui est l'âge effectivement prédit par Louis.

En outre, les dictionnaires usuels ne mentionnant pas l'existence de Louis (et donc pas son année de naissance), on peut également se poser une autre question, à savoir: En quelle année est-il né ?

D'après ses calculs, Louis estime son propre âge au décès à 55 ans ; or ces calculs indiquent que l'âge au décès augmente avec la tranche d'âge (sauf pour les jeunes enfants); on peut donc supposer que, en 1669, Louis a entre 36 et 46 ans, son âge étant donc de la forme $36 + x$, avec $0 \leqslant x \leqslant 9$. L'interpolation linéaire donne cette fois $53{,}5 + (61 - 53{,}5) \times (x/10) = 55$, d'où $x = 2$. Louis aurait alors 38 ans en 1669, ce qui fait qu'il serait né en 1631.

Dans la lettre du 21.11.1669 indiquée plus haut, Christian indique sa propre méthode pour répondre à la questions posée par son frère, c'est-à-dire "*combien il reste raisonnablement à vivre à une personne d'un âge proposé*". Il signale qu'elle ne nécessite aucun calcul, car il a, à partir de "*la petite table anglaise*", construit un graphique. Ce graphique n'est pas joint à la lettre, mais il a été retrouvé à la bibliothèque de Leyde, assorti de son mode d'emploi. Le voici :



On voit que les âges sont portés en abscisses, et le nombre de survivants (sur 100) en ordonnées. Christian indique :

Si je veux savoir (...) combien il reste raisonnablement à vivre à une personne de 20 ans par exemple, je prends la moitié de BA et l'ajuste en DC entre *la courbe et la droite, en sorte qu'elle soit perpendiculaire à la dernière. Et j'ai AC pour les années qui restent à vivre à ladite personne, qui font près de 16 ans.*

On voit immédiatement que la méthode de Christian est tout à fait différente de celle de Louis : ce qu'il recherche, c'est -pour un âge donné- le temps au bout duquel la moitié des survivants à cet âge auront disparu. C'est-à-dire -en notant S(x) le nombre de survivants à l'âge x - la valeur h (fonction de x) telle que $S(h+x) = \frac{1}{2} S(x)$. Ce paramètre h($x$), qui n'est autre que la durée *médiane* de survie à l'âge x, a depuis été nommé, par les sociologues, *durée de vie probable*.

Les historiens ont remarqué que les nombres de la table de Graunt paraissent trop beaux pour être vrais, et ont subodoré que, plutôt que d'être fondée sur une observation véritable, "*cette table [repose] sur l'idée que la répartition des décès par âge obéit à une loi cachée*" (Dupâquier, op. cit.). En effet, Graunt indique lui-même que, "*comme il y a 7 décennies entre 6 et 76, nous avons recherché six nombres moyens proportionnels entre 64, nombre de survivants à 6 ans, et 1, celui qui survit à 76 ans*". Hacking[5] en déduit -de façon naturelle- que Graunt aurait utilisé la formule $64(1-p)^7 = 1$, où p est la proportion des personnes vivantes à l'âge x (x = 6, 16,...,76) décédant dans la décennie suivante, c'est-à-dire que $1 - p = \frac{S(x+10)}{S(x)}$. Cette hypothèse conduit à la relation de récurrence $S(6 + 10k) = 2^{-6/7} S(6 + 10(k-1))$, et fournit les résultats suivants pour $S(x)$[6]:

âge x	6	16	26	36	46	56	66
S(x)	64	35	20	11	6	3	2
Graunt	64	40	25	16	10	6	3

Comme on le voit, ces résultats sont assez éloignés de ceux de Graunt. J. Dupâquier fait en outre remarquer que celui-ci, maître drapier, n'avait pas les connaissances mathématiques suffisantes pour avoir pratiqué ainsi; selon lui, la "loi cachée" serait bien de ce type, mais avec un exposant empirique, égal à 5/8.

[5] Ian Hacking : *The emergence of probability*, Cambridge University Press 1975.

[6] En arrondissant à l'entier le plus proche car, comme le dit Graunt, "*les hommes ne meurent pas selon des proportions exactes ni en fractions*".

On obtient alors la relation de récurrence $S(6+10k) = (5/8)S(6 + 10(k-1))$ pour $1 \leqslant k \leqslant 5$, que Graunt aurait modifiée et complétée *grosso modo* , à l'estime, pour les grands âges. Cette hypothèse fournit les nombres suivants (arrondis à l'entier le plus proche), qui sont nettement plus convaincants que ceux de Hacking:

âge x	6	16	26	36	46	56	66
$S(x)$	64	40	25	16	10	6	4
Graunt	64	40	25	16	10	6	3

Interpolée pour les âges intermédiaires, à partir d'un âge quelconque x, la relation précédente devient $S(x + n) = \left(\frac{5}{8}\right)^{n/10} S(x)$. En appliquant alors la méthode de Christian, on cherche pour quelle valeur de n on a $\left(\frac{5}{8}\right)^{n/10} = \frac{1}{2}$, ce qui conduit à $n = \frac{10 \ln 2}{\ln 8 - \ln 5}$, soit $n \approx 14{,}75$. C'est-à-dire que la durée de vie probable est égale à 14 ans et 9 mois, et ceci quel que soit l'âge considéré (les 16 ans indiqués par Christian sont très certainement dus au manque de précision inhérent aux interpolations graphiques qu'il est contraint de faire).

La méthode de Louis, quant à elle, ne fait pas du tout appel au langage des jeux, si familier à son frère; elle s'appuie fondamentalement sur la notion de moyenne, tant à l'intérieur de chaque classe ("*l'une portant l'autre*") que pour l'ensemble des centres de classe. Il fait cependant appel au langage de Christian pour indiquer qu'il n'est pas d'accord avec le résultat que celui-ci lui a indiqué dans sa précédente lettre: "*à mon avis, la partie est environ égale lorsqu'on gage qu'une personne de 6, ou une de 16, vivront environ encore 20 ans*". En effet, tant à l'âge de 6 ans qu'à celui de 16 ans, il trouve une durée de survie d'environ 20 ans. D'où provient donc ce désaccord patent entre les deux frères ?

Commençons par remarquer que le paramètre que calcule Louis est

$$k(x) = \frac{1}{S(x)} \sum_{n=1}^{\infty} (10n - 5)\left[S(x + 10(n-1)) - S(x + 10n)\right] =$$

$$\frac{5}{S(x)}\left[S(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} S(x + 10n)\right] ;$$

il s'agit en fait - modulo la concentration de chaque classe en son centre - de la durée *moyenne* de survie à l'âge x (habituellement désignée aujourd'hui comme *l'espérance de vie* à l'âge x). Christian et Louis ne parlent donc pas de la même chose [7], et dès lors il n'est pas étonnant qu'ils n'aboutissent pas au même résultat.

Cependant, dans un manuscrit lui ausi daté du 21 novembre 1669 et intitulé "*En examinant le calcul de mon frère Louis*", Christian change son fusil d'épaule et effectue un raisonnnement très voisin de celui de son frère : "*de cent enfants conçus il en meurt 36 devant l'âge de 6 ans, lesquels on peut dire avoir vécu, l'un portant l'autre, 3 ans. Des 64 restants de 6 ans il en meurt 24 devant l'âge de 15 ans, lesquels ont vécu, l'un portant l'autre, 11 ans...*". Malgré tout, il n'abandonne pas sa position première, et indique que "*quoique l'espérance d'un enfant conçu vaille ces 18 ans 2 1/2 mois, ce n'est pas dire qu'il vivra si longtemps car il est beaucoup plus apparent qu'il mourra devant ce terme*". Et il poursuit dans la même voie, en continuant à critiquer la méthode de Louis : "*il se trompe aussi en disant que, quand on gage qu'un enfant de 6 ans ou de 16 vivra encore 20 ans, la partie est égale. Car on ne peut mettre que 25 contre 39 sur celui de 6 ans, et 2 contre 3 sur celui de 16, quoique l'espérance de l'un et de l'autre vaille 20 ans*". En somme, il a bien compris ce que faisait son frère, mais il reste persuadé que son approche est meilleure.

La recherche de Christian sur ce thème ne s'arrête pas là ; dans le même document, il s'attaque - toujours à partir de la seule table de Graunt - au problème d'une rente viagère sur deux têtes: "*En combien de temps mourront 2 personnes de 16 ans chacune ? Réponse en 29 ans 2 2/3 mois*". Et, pour résoudre cette question, il imagine un modèle d'urne :

> *Pour savoir combien vivra le dernier de 2 personnes de 16 ans, il faut s'imaginer que chacun tire un billet hors de 40 (complets) dont il y en a :*
> *15 qui donnent 5 ans,*
> *9 qui donnent 15 ans,*
> *(...)*
> *1 qui donne 65 ans.*
> *Et qu'ils prendront des 2 billets celui qui a le plus d'ans pour la vie du dernier.*

Cependant, dans une lettre du 29 novembre 1669, Christian rend quand même justice à Louis. Il lui écrit: "*Je trouve que nous avons tous deux raison en prenant la chose en différent sens. (...) Votre méthode est fort belle est*

[7] La distinction entre les deux notions ne sera officiellement introduite qu'en 1746 par Antoine Deparcieux, dans son *Addition à l'Essai séur les probabilités de la durée de la vie humaine*.

subtilement trouvée.". Il met aussi clairement en évidence ce que chacun a calculé: "*ce sont donc deux choses différentes que l'espérance ou la valeur de l'âge future d'une personne, et l'âge auquel il y a égale apparence qu'il parviendra ou ne parviendra pas.*"

En conclusion, cette correspondance des frères Huygens (malheureusement restée inédite jusqu'en 1920[8]) se révèle, on a pu s'en rendre compte, tout à fait étonnante, tant du point de vue des notions nouvelles (espérance de vie, durée de vie probable) qu'ils dégagent, que des méthodes qu'ils utilisent (graphique, modèle d'urne) et des applications que Christian entrevoit pour les tables de mortalité (notamment le calcul des rentes viagères). Ce qui conduit J. Dupâquier à remarquer fort justement qu'"*il est bien dommage que leurs réflexions n'aient pas été publiées, car elles auraient épargné à leurs successeurs 75 ans de tâtonnements!*"

---

[8] In *Œuvres complètes de Christian Huygens*, éditées par Martin Nijhoff, La Haye 1920 (tome VI, pp. 519 sq.).