



Ateliers A 21 et C 20

QUADRILATÈRES ARTICULÉS

Françoise PÉCAUT
Université d'Avignon

Soit une suite de quatre tiges (ou côtés) de longueurs données $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, articulées librement deux à deux en chacun des sommets (ou pivots) A, B, C, D : c'est un quadrilatère articulé. Nous le considérons dans le plan affine euclidien.

Le quadrilatère articulé a été étudié à la fin du XIX^e siècle, du point de vue cinématique par KOENIGS, du point de vue variable complexe par DARBOUX, pour ne citer que les deux références les plus importantes. Pour introduire à l'étude du quadrilatère articulé et mettre en évidence la variété des concepts et la simplicité des résultats, il a été proposé deux ateliers dont voici approximativement les contenus :

Atelier A 21

I. Classification d'après le nombre de pivots à révolution complète (inégalité triangulaire).

II. Relation entre les longueurs des diagonales. Quelques mots sur les courbes de genre un et les fonctions elliptiques.

Atelier C 20

III. Circonscripibilité à un cercle (élémentaire).

IV. Connexité de l'ensemble des positions.

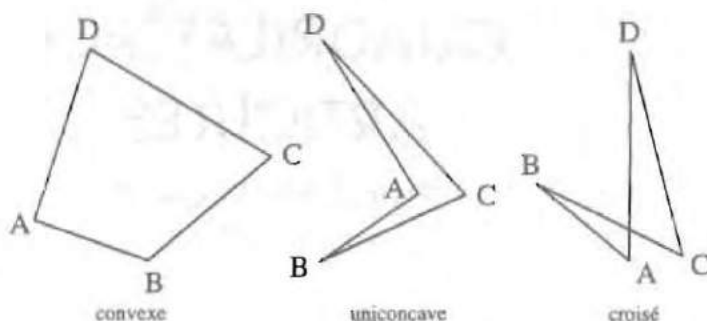
V. La suite de Darboux. Le théorème a été énoncé. Le cas où la suite ne comporte que quatre termes a été complètement étudié.

Pour chaque atelier, il y a une partie élémentaire, avec des démonstrations, et une partie d'un niveau plus élevé où il n'a été donné que des indications. Des modèles (tiges en carton articulées par des œillets) ont circulé parmi les participants pour manipulation.

Introduction

La figure représente trois positions du quadrilatère (a, b, c, d) :

$$a = 2 \text{ cm}, b = 2,7 \text{ cm}, c = 3,5 \text{ cm}, d = 3 \text{ cm}$$



Dans la suite les deux longueurs de diagonales sont notées x et y , $x = BD$, $y = AC$. Les sommets et les côtés sont baptisés de manière que $AB = a = \inf(a, b, c, d)$ et que la longueur de la tige qui s'articule avec AB en B soit inférieure à la longueur de la tige qui s'articule avec AB en A ($d \geq B$).

I. Existence de pivots à révolution complète

D'abord, pour qu'un quadrilatère (a, b, c, d) existe, il faut et il suffit que chaque longueur de tige soit inférieure à la somme des trois autres. Pour que le quadrilatère puisse bouger, on exige l'inégalité stricte. Dans la suite donc :

$$Q = (-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d) > 0$$

chaque terme du produit étant évidemment positif. Introduisons les intervalles $I_A = [d - a, d + a]$, $I_C = [|b - c|, b + c]$, $I_B = [b - a, a + b]$, $I_D = [|d - c|, c + d]$. La condition d'existence s'écrit aussi :

$$I_A \cap I_C \text{ d'intérieur non vide} \Leftrightarrow I_B \cap I_D \text{ d'intérieur non vide}$$

En effet $x \in I_A \cap I_C$, ou $y \in I_B \cap I_D$, sont des conditions qui permettent de construire le quadrilatère et celui-ci doit pouvoir bouger.

L'existence du quadrilatère (a, b, c, d) étant acquise, fixons la tige AD par exemple. A quelle condition la tige AB peut-elle faire un tour complet autour de A ? Si c'est possible, le pivot A est dit à révolution complète. La condition d'existence de tels pivots a été détaillée (inégalité triangulaire) et donnée sous trois formes équivalentes :

(i) $E \leq M$ où $E = \sup(a + b, a + c, a + d)$ et M est la somme des deux autres côtés.

(ii) $I_A \subset I_C \Leftrightarrow I_B \subset I_D$

(iii) $P = (a + b - c - d)(a + c - b - d)(a + d - b - c)(a + b + c + d) \leq 0$

Si l'une de ces conditions est réalisée, il existe au moins deux pivots à révolution complète, extrémités d'une tige de longueur minimum. Il est utile de noter que le contraire de ces conditions (pas de pivot à révolution complète), évident pour (i) et (iii), s'écrit en ce qui concerne (ii), compte tenu de la condition d'existence :

(ii)' I_A et I_C sont enchevêtrés, c'est à dire que chacun rencontre le complémentaire de l'autre, ou

(ii)'' I_B et I_D sont enchevêtrés.

Quand il y a des pivots à révolution complète, il n'y en a en général que deux. Voici les cas particuliers où il y en a davantage :

- le quadrilatère bi-isocèle, dit cerf-volant dans sa position convexe, dit fer de lance dans sa position uniconcave, a trois pivots à révolution complète.
- le parallélogramme, dit contre-parallélogramme dans sa position croisée, et son cas particulier, le losange, ont quatre pivots à révolution complète.

II. Relation entre les longueurs des diagonales

On l'obtient simplement en écrivant $\det(DA, DB, DC) = 0$. En multipliant à gauche la matrice A des composantes des trois vecteurs par la matrice transposée, les éléments de la matrice produit sont les produits scalaires des trois vecteurs pris deux à deux. On a $\det {}^1A A = (\det A)^2 = 0$ et

$$DA^2 = d^2, \quad DB^2 = x^2, \quad DC^2 = c^2$$

$$2 DA \cdot DB = DA^2 + DB^2 - AB^2 = d^2 + x^2 - b^2; \quad 2 DB \cdot DC = x^2 + c^2 - b^2;$$

$$2 DC \cdot DA = c^2 + d^2 - y^2.$$

En posant $x^2 = X$, $y^2 = Y$, on trouve une relation du troisième degré en X et Y :

$$R(X, Y) = -XY(X + Y - \alpha) + \beta Y + \gamma Y + \delta = 0$$

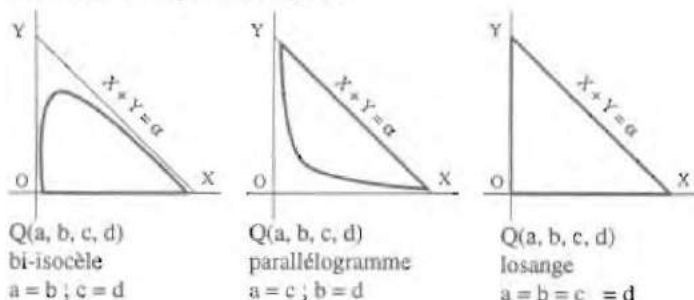
$$\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2; \quad \beta = (d^2 - a^2)(b^2 - c^2); \quad \gamma = (b^2 - a^2)(d^2 - c^2);$$

$$\delta = (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)(a^2 c^2 - b^2 d^2)$$

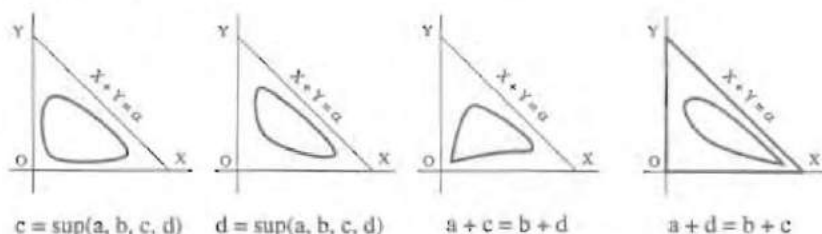
On note Γ la partie du graphe de cette cubique au dessus de I_A pour $E \leq M$, au dessus de $I_A \cap I_C$ pour $E > M$. La courbe Γ est simple fermée. Elle délimite un domaine convexe. Γ est coupée en deux points par une

parallèle à l'axe des X ou à l'axe des Y. Les figures ci-dessous montrent l'allure de la courbe Γ dans les différents cas.

Cas particuliers : cubique décomposée



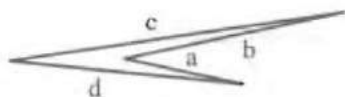
Cas général : pas de point double (elliptique, $P \neq 0$) ; un point double (unicursal, $P = 0$)



- Si une cubique a deux points doubles, elle est décomposée. Le graphe de $R(X, Y) = 0$ ayant trois directions asymptotiques est décomposable de deux façons en une hyperbole et une droite, d'une seule façon en trois droites. En écrivant la décomposition, on constate qu'il s'agit des cas particuliers où le quadrilatère a strictement plus de deux pivots à révolution complète.
- Si une cubique a un point double, elle est unicursale, c'est à dire qu'elle admet une représentation paramétrique rationnelle. Γ a un point double à tangentes distinctes si et seulement si $E = M \Leftrightarrow P = 0 \Leftrightarrow I_A \subset I_C$ avec une extrémité commune, ou tout simplement lorsque $Q(a, b, c, d)$ est "pliable" sans que ses quatre côtés soient deux à deux égaux.
 $Q(a, b, c, d)$ peut être "pliable" de deux façons, comme l'indiquent les positions ci-dessous presque pliées :



$$a + d = b + c$$



$$a + c = b + d$$

- Une cubique qui n'a pas de points doubles est dite de genre un. Les coordonnées d'une courbe de genre un sont des fonctions rationnelles de fonctions elliptiques.

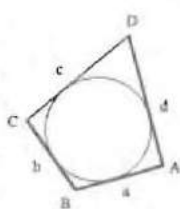
[Les quantités $Q/16abcd$ et $-P/16abcd$ définissent les deux périodes].

Dans la suite, un quadrilatère est dit décomposé, unicursal, ou elliptique suivant que la cubique qui lui est attachée est décomposée, unicursale ou de genre un.

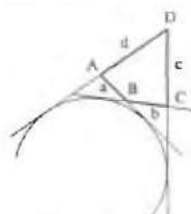
III. Circonscribibilité à un cercle

- Un quadrilatère décomposé est circonscriptible à deux cercles, si on admet dans le cas du parallélogramme (et du losange) qu'il s'agit de deux cercles dont les centres sont à l'infini. Réciproquement, si un quadrilatère est circonscriptible à deux cercles, il est décomposé.

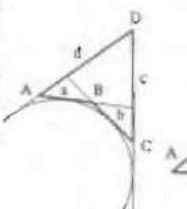
- Un quadrilatère circonscriptible à un cercle est unicursal, comme on le vérifie facilement en écrivant que les segments des tangentes au cercle issues d'un sommet sont égaux. La réciproque est vraie : un quadrilatère unicursal est circonscrit à un cercle et à un seul quelle que soit sa position. Le temps a manqué pour en donner la démonstration, qui se fonde sur la composition des rotations et des symétries dans le plan.



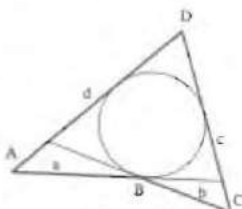
$$a + c = b + d$$



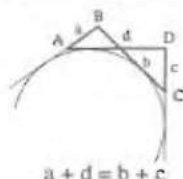
$$a + d = b + c$$



$$a + d = b + c$$



$$a + c = b + d$$

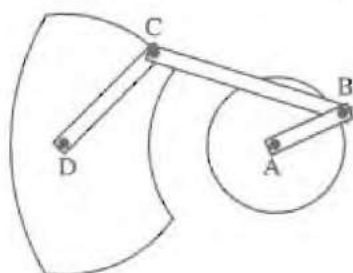


$$a + d = b + c$$

- Un quadrilatère elliptique n'est pas circonscriptible à un cercle.

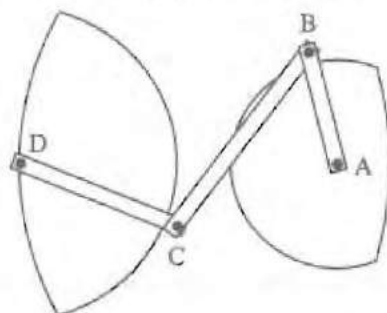
IV. Connexité de l'ensemble des positions d'un quadrilatère plan articulé

On fixe les pivots D et A. Le pivot B décrit tout ou partie du cercle de centre A et de rayon a. Le pivot C décrit une partie du cercle de centre D et de rayon c. Il y a transmission du mouvement d'une "roue" à l'autre par la "bielle" BC et les "manivelles" AB et DC dans le langage de KOENIGS.



$$a = 2; b = 5,5; c = 3,5; d = 6$$

$$E < M : a + d < b + c$$



$$a = 2; b = 4; c = 3; d = 6$$

$$E > M : a + d > b + c$$

Les dessins sont faits dans le cas elliptique $P \neq 0$ avec $d = \sup(a, b, c, d)$. A gauche la bielle transforme un mouvement de va-et-vient sur un arc de cercle en un mouvement circulaire complet. Il y a deux composantes connexes de l'ensemble des positions du quadrilatère suivant que le point C appartient à l'un ou à l'autre de deux arcs disjoints. A droite chacun des deux mouvements se limite à un arc de cercle, l'ensemble des positions est connexe : le quadrilatère articulé peut se retourner dans son plan.

V. La suite des quadrilatères de DARBOUX

On part d'une position $Q = ABCD$ d'un quadrilatère articulé de côtés a, b, c, d . On prend le symétrique A_1 de A par rapport à la diagonale BD. On note Q_1 le quadrilatère A_1BCD . Ensuite on prend le symétrique B_2 de B par rapport à la diagonale A_1C . On note $Q_2 = A_1B_2CD$. On poursuit, en prenant à chaque étape le symétrique d'une extrémité de la diagonale commune aux deux quadrilatères précédents par rapport à l'autre diagonale du quadrilatère précédent. Les dessins de l'introduction représentent les trois premiers termes d'une suite de DARBOUX. Le lecteur pourra dessiner les deux termes suivants.

Théorème de DARBOUX : ou bien la suite comprend un nombre illimité de formes distinctes du quadrilatère, quelle que soit la forme de départ, ou bien la suite comprend un nombre limité de formes distinctes et, quelle que soit la forme initiale, ce nombre est toujours limité et toujours le même dans chaque suite.

Le grand théorème de PONCELET, qui s'explique comme le théorème de DARBOUX par le rôle des fonctions elliptiques dans la paramétrisation d'une cubique de genre un, a été évoqué, ainsi que l'alternative de STEINER (voir BERGER, Géométrie, 10-10-3, 10-10-4, et 16-6).

La suite de DARBOUX est limitée à quatre termes pour

$$\delta = (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)(a^2 c^2 - b^2 d^2) = 0.$$

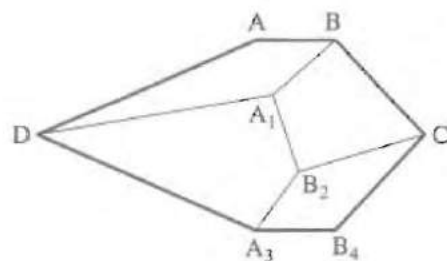
On met ainsi en évidence deux familles de quadrilatères articulés :

1) les quadrilatères à diagonales rectangulaires : $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

C'est le cas du quadrilatère figuré dans trois positions dans l'introduction. Les quadrilatères de cette famille sont elliptiques avec deux pivots à révolution complète ($P < 0$).

2) les bissectrices de deux angles opposés se coupent sur la diagonale : $ac = bd$.

Ces quadrilatères sont elliptiques, avec une seule composante connexe de l'ensemble des positions ($P > 0$).



Dans la figure ci-contre, les pivots C et D sont fixés. Le côté CD n'est pas matérialisé.

ABCD définit la position initiale du quadrilatère de côtés a, b, c, d.

Après quatre opérations de symétrisation la position finale est A_3B_3CD .

Un modèle a circulé parmi les participants, fait de 11 bandes de carton reliées par des œillets, mobiles sur un support de contreplaqué, avec des vis fixées en C et D dans le contreplaqué.

Sans quitter le support plan, on peut échanger la ligne brisée DABC avec la ligne brisée symétrique DA_3B_3C .

Sur ce modèle on vérifie expérimentalement deux résultats :

- 1) La nature de la suite de DARBOUX ne dépend pas de la forme initiale,
- 2) Pour ce quadrilatère elliptique particulier tel que $E > M$, l'ensemble des positions est connexe.

Bibliographie

G. DARBOUX. *Sur l'emploi des fonctions elliptiques dans l'étude du quadrilatère plan*. C.R. 1879, t. 88, n° 23, p. 1183 -1185 et p. 1252 -1255 (deux Notes).

G. KOENIGS. *Leçons de cinématique*. Librairie scientifique A. Hermann (1897).

M. BERGER. *Géométrie*. Cedic. Fernand Nathan. Paris 1977.

D. LEBORGNE. *Systèmes articulés et Géométrie au 19ème siècle*. Gazette des mathématiciens n° 14, juillet 1980.

D. ZVONKINE. *Courbes elliptiques dans la Géométrie élémentaire*. Quadrature n° 27. Argenteuil 1997.