APMEP97 marseille

Atelier A 20

Le triangle arithmétique à travers les âges

Michel Guillemot

Au début du XI^{e} siècle, de nombreux savants connaissaient le triangle arithmétique. Certes les témoignages que nous en avons ne sont pas de première main, mais nous pouvons penser que certains mathématiciens arabes ou chinois utilisaient le triangle arithmétique à cette période.

De nombreux écrits consacrés à l'histoire des mathématiques chinoises indiquent l'illustration du début du Siyuan Yujian (Miroir pur comme le jade des quatre primordialités) écrit par Zhu Shije en 1303. Nous y voyons, en effet, les coefficients du binôme écrits jusqu'à la huitième puissance. Mais, en fait, Zhu Shije n'utilise pas explicitement ce triangle, lui préférant la méthode dite de Ruffini-Hörner pour rechercher les racines « d'équations polynomiales ». Il ne prétend nullement être l'inventeur de ces procédés. Quelques années plus tôt, vers 1275, Yang Hui avait présenté un triangle arithmétique, jusqu'à la sixième puissance, tout en précisant que son utilisation remontait à Jiu Xian qui aurait vécu vers 1050. Les ouvrages de ce savant ne nous sont pas parvenus. Quant à celui de Yang Hui, il s'agit du Xiangjie Jiuzhang Suanfa (Explication détaillée des méthodes de calcul des neuf chapitres) : les Neuf Chapitres sur l'art du calcul étant la « bible » mathématique chinoise compilée au premier siècle de notre ère et inspirant de nombreux commentateurs. La seule traduction à laquelle nous ayions eu accès est partielle. Elle est l'œuvre de Lam Lay Yong et elle correspond à la description du triangle :

« The unit coefficients of the absolute terms (chi-shù) span the left side. The unit coefficients of the highest powers (yü-suan) span the right side. The centre contains all the other coefficients (lien) . After the coefficients are multiplied by the « estimated root » (shang), the sum of the

products is removed from the absolute term (shih) ».(p.416)

Cela ne fait aucun doute, Yan Hui utilise le triangle arithmétique pour la recherche des racines des « équations polynomiales ». En l'absence d'autres indications nous proposons, ici, une adaptation d'une reconstruction donnée par John Hoe : nous l'appliquons à la résolution du premier problème de l'ouvrage de Zhu Shije où l'auteur nous donne la réponse, sans indication de la solution. Il s'agit de déterminer un triangle rectangle dont on connaît le produit du diamètre d du cercle inscrit par celui des deux côtés a et b de l'angle droit, 24, et la somme d'un côté, a, avec l'hypoténuse, c : 9. Autrement dit, il s'agit de résoudre le système :

$$abd = 24\ ,\ a + c = 9,\ d = a + b - c\ ,\ a^2 + b^2 = c^2$$

qui conduit à la recherche des racines de l'équation :

$$b^5 - 9b^4 - 81b^3 + 729\,b^2 - 3888 = 0\ , \qquad (1)$$

équation dont les coefficients figurent dans le texte de Zhu Shije. La solution, 3, peut se trouver pas à pas en opérant, selon John Hoe, comme suit. On écrit les coefficients de (1) ainsi que les coefficients binomiaux, puis leurs produits ligne à ligne.

- 3888	1						- 3888					
0	1	1					0	0				
729	1	2	1				729	1458	729			
- 81	1	3	3	1			- 81	- 243	- 243	- 81		
- 9	1	4	6	4	1		- 9	- 36	- 54	- 36	- 9	
1	1	5	10	10	5	1	1	5	10	10	5	1

En additionnant les nombres de chaque colonne on obtient les coefficients d'une nouvelle équation correspondant au changement d'inconnue de b en $(1 + y)$:

$$(2) \qquad -3\,248 + 1184\,y + 442\,y^2 - 107\,y^3 - 4\,y^4 + y^5 = 0\ .$$

En réitérant le procédé nous obtenons une autre équation dont la somme des coefficients est nulle, c'est-à-dire admettant 1 pour racine : autrement dit, 2 est racine de (2) et 3 est bien racine de (1).

Plus tard, en Chine, d'autres savants, tels Mei Wending (1633-1721) ou Li Shanlan (1810 - 1882) utiliseront à leur tour le triangle arithmétique ou d'autres tableaux semblables.

Quant aux mathématiciens arabes, As-Samaw'al, mort en 1174, attribue le triangle arihmétique, et ce qui s'y rattache, à l'un de ses prédécesseurs, Al-Karaji. Nous ne savons presque rien de ce brillant algébriste si ce n'est qu'il a vécu à Bagdad à la fin du Xe et au début du XI^e. Si certains de ses écrits nous sont parvenus il n'en est malheureusement pas de même pour celui auquel se réfère As-Samaw'al.

Voici comment, d'après As-Samaw'al, Al Karaji construit son triangle.(Rashed, p. 76)

> « Rappelons maintenant un principe pour connaître le nombre nécessaire de multiplications de ces degrés les uns par les autres, pour tout nombre divisé en deux parties. Al-Karajï a dit que si l'on veut y parvenir il faut poser sur un tableau « un » et « un » au-dessous du premier, déplacer le [premier] « un » le [premier] « un » à celui qui est au-dessous de lui : on obtiendra ainsi « deux » que l'on posera sous le « un » [déplacé] et on posera le [deuxième] « un » au-dessous de lui. On aura donc « un », « deux » et « un ». Ceci montre que pour tout nombre composé de deux nombres, si l'on multiplie chacun d'eux par lui-même une seule fois - car les deux extrêmes sont « un » et « un » - et si l'on multiplie chacun d'eux par l'autre deux fois - parce que le terme intermédiaire est 2 - on obtiendra le carré de ce nombre. Si on déplace ensuite le « un » de la deuxième colonne sur une autre colonne, qu'on ajoute le « un » [de la deuxième colonne] au « deux » [au-dessous de lui], on aura « trois » qu'on inscrira sous le « un » [de la troisième colonne] si on ajoute alors le « deux » [de la deuxième colonne] au « un » au-dessous de lui, on aura « trois » qu'on inscrira sous « trois », puis on inscrira « un » sous ce « trois » ; on obtiendra ainsi une troisième colonne dont les nombres sont « un », « trois », « trois » et « un ». Ceci nous apprend que le cube de tout nombre composé de deux nombres est donné par la somme du cube de chacun d'eux et de trois fois le produit de chacun d'eux par le carré de l'autre.

Cette construction, explicitée jusqu'à l'ordre 5 correspond aux règles classiques

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

Elle nous « apprend » la formule du binôme.

Il semble que le légendaire savant et poète persan, Omar Khayyâm (1048 - 1131), ait exposé, pour la première fois, dans un ouvrage qui ne nous est pas parvenu, une démonstration de la véracité de cette formule. Voici ce qu'il écrit dans son (*Magal Fil Jabr Wal Maqabala*, (traité en algèbre et en mugabalà) traité d'algèbre où il développe une théorie géométrique des équations cubiques (p. 20) :

« Les Indiens possèdent des méthodes pour déterminer les côtés des carrés et des cubes, reposant sur une induction <fondée> sur peu <de nombres> ; c'est-à-dire la connaissance des carrés de neuf chiffres, à savoir le carré de un, de deux, de trois <...>, ainsi que des produits de l'un par l'autre, à savoir, le produit de deux par trois, et de même pour les cas similaires. Nous avons composé un ouvrage pour démontrer que ces méthodes sont exactes et qu'elles mènent à l'objet cherché. Nous en avons, en outre, multiplié les formes, je veux dire que nous avons montré comment déterminer les côtés du carré-carré, du carré-cube, du cubo-cube, et ainsi de suite, ce en quoi personne ne nous avait précédé. Ces démonstrations sont des démonstrations numériques, fondées sur les livres Arithmétiques de l'ouvrage des *Eléments* . »

As-Samaw'al utilise quant à lui les coefficients dans un cadre numérique. Ainsi, après avoir déterminé une valeur approchée a de la racine n-ième d'un nombre N, il donne donne comme autre valeur approchée

$$a + \frac{N - a^n}{\binom{n}{1} a + \binom{n}{2} a^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} + 1}$$

généralisant les approximations connues pour n égal à 2 ou 3. Cette approximation sera reprise par Nasir al-din at Tusi (1201 - 1274). En dehors des aspects algébriques et numériques, les savants arabes n'ont pas dédaigné de s'intéresser aussi à l'aspect combinatoire du triangle arithmétique. Nous citons seulement, ici, les travaux du savant maghrébin d'origine andalouse, Ibn Mun'im, mort en 1228. Son ouvrage Fiqh al-Hisàb a été écrit entre 1207 et 1212. Le premier problème du chapitre 11 est le suivant : (Djebbar , p. 18).

« Problème 1 »

Etant donné dix couleurs de soie, avec lesquelles nous voulons faire des houppes (respectivement) d'une, de deux, de trois couleurs, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière houppe qui doit être de dix couleurs, nous voulons savoir quel est le nombre de houppes de chaque espèce, les couleurs de chaque houppe étant connues, ou quel est le nombre de toutes les houppes rassemblées, compte tenu des différents nombres de couleurs des houppes.

Quant au triangle arithmétique il a la forme suivante : (Djebbar p.16 , p.54)

Bien sûr de nombreux mathématiciens arabes ont utilisé le triangle arithmétique : nous avons voulu signaler ici seulement ceux qui nous ont paru les plus représentatifs.

somme	Ecriture de l'exemple dans le tableau										
1	1	Ligne des houppes de dix couleurs									
10	9	1	Ligne des houppes de neuf couleurs								
45	36	8	1	Ligne des houppes de huit couleurs							
120	84	26	7	1	" " " " " " " sept couleurs						
210	126	56	21	6	1	" " " " " " " six couleurs					
252	126	70	35	15	5	1	" " " " " cinq couleurs				
210	84	56	35	20	10	4	1	" " " quatre couleurs			
120	36	26	21	15	10	6	3	1	" " trois couleurs		
45	9	8	7	6	5	4	3	2	1	" deux couleurs	
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	" une couleur
l'ensemble des couleurs	10° couleur	9° couleur	8° couleur	7° couleur	6° couleur	5° couleur	4° couleur	3° couleur	2° couleur	1° couleur	

Au début du XVI[e] siècle le triangle arithmétique devait, sans doute, être plus ou moins bien connu des mathématiciens, en Occident, depuis longtemps. Toutefois, la première occurrence connue est celle de l'arithmétique commerciale Ein neue vnd wolgegrundte undermeiβung aller Kauffmanns

Rechnung publiée en 1527 par Peter Apian (1495-1552). Le cadre d'une arithmétique destinée à des marchands peut surprendre ; mais, en dehors de ses qualités de cartographe et d'astronome, Apian connaît l'algèbre et il n'hésite pas à terminer son ouvrage par l'extraction des racines jusqu'à l'ordre huit. Voici comment il présente l'extraction de la racine sixième de 6 499 837 226 778 624 (nous laissons au lecteur le plaisir de comprendre les calculs).

¶ Radix Zensicuba.

6499837226778624 Nũr⁹ Zensicub⁹

Der Erste Satz disser extraction.

8
773 7
240 47417
6499837226778624 (43
6144
3840
1280
240
24
18432
34560
34560
19440
5832
729
2225363049

(432.
Radix Zensicuba.

Der Ander Satz

1784741777778624
882050658 (432
51282015
1590140
27735
258
1764101316
205128060
12721120
443760
8256
64
1784741777778624

Selon les procédés d'approximations précités utilisés par As-Samaw'al, Scheubel donne 88 144/177 pour racine carrée de 7887
et 314269 52428 / 296 295 955 881 pour racine cubique de 310 387 791 555 795 37.

MICHAELIS STIFELII

1951560163572161, hæc eſt ſumma prouenſens ex additione omnium horum, tollit'q; punctum remanens.

De inuentione numerorum, qui peculiariter pertinent ad ſuas ſpecies extractionum.

Reſtat iam ut tradam modum inueniendi numeros, qui peculiariter pertinent ad quamlibet ſpeciem extractionum, quatenus perfecta habeatur & abſoluta huius negotij conſumatio. Tradam autem huiuſmodi inuentionē, per tabulam ſequentem, quæ ut in infinitum extendatur tuipſe facile uidebis, quàm primum uideris rationem qua conſtruitur. Sic autem conſtructam uides.

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Primo, à latere ſiniſtro deſcendit naturalis numerorum progreſſio, quam extendere poteris quantū uolueris. Et illa radix eſt ſequentium laterum omnium. Nam ſecundum latus, quod continet numeros trigonales, ſic oritur ex primo latere. Duobus

STIFEL, M. Arithmetica Integra, Nuremberg 1544. Document communiqué par Odile Kouneynikoff et traduit par Denis Daumas

Plus intéressante est peut-être la présentation donnée par Michael Stifel (1487 - 1567) dans son *Arithmetica integra* parue à Nuremberg en 1544 . Elle est intimement liée à l'extraction des racines n-ièmes. La loi de construction du triangle arithmétique correspond aux égalités :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} \quad \text{et} \quad \binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$$

puisque Stifel opère des choix différents lorsque le rang est pair ou impair.

Et ainsi pour les autres règles des autres types, à l'infini.

➡ Explication des représentations, c'est-à-dire, expression des règles.

Tu opéreras de la même façon autant de fois qu'il faudra régler de points, et suis de cette manière jusqu'au point qui est vers la droite. Voici la règle :

➡ Premièrement, place les nombres du milieu, c'est-à-dire ceux qui doivent être particuliers à ton opération.

➡ Deuxièmement, dresse ta progression ascendante, c'est-à-dire celle qui doit être placée à gauche. Et elle vient à s'établir ainsi : tout en bas, place tout ce qui est dans le quotient, comme racine de la progression, et monte ainsi par le carré, le cube, etc. tant que le nombre de la partie à gauche se trouve collatéral lui-même à un des nombres du milieu. En faisant cela, tu te procureras le diviseur par lequel tu divises ton point, pour que tu trouves le nouveau chiffre qui doit être placé dans le quotient. Il va de soi que tu multiplieras les moyens, quels qu'ils soient, par le nombre collatéral placé à sa gauche, et ces produits additionnés entre eux te donneront ton diviseur. À moins que ce ne soit pas nécessaire que tu effectues toutes les multiplications, mais qu'il suffise que tu fasses deux multiplications à partir des rangs supérieurs et que tu les additionnes ainsi, pour que tu obtiennes le diviseur.

➡ Troisièmement, constitue ta progression descendante, c'est-à-dire celle qui doit être posée à droite, celle-ci en effet descend toujours. Et tu disposes celle-ci ainsi :

Tout en haut pose ton nouveau chiffre du quotient, c'est évidemment celui que tu dois trouver à partir de cette division. Celui-ci étant posé ainsi, en tant que racine de la progression, avance en descendannt avec le carré, le cube, etc. jusqu'à ce que, en nombre de cases, ta progression dépasse d'une case celle qui est placée à gauche, ainsi que les représentations des règles l'indiquent bien. Ceci fait, multiplie les trois du haut entre eux, puis encore les trois suivants entre eux, surajoute encore ce fameux nombre, que l'on a placé dans la partie droite, tout seul, tout en bas. Par conséquent, une fois la somme retranchée de ton point, cela sera achevé.

Tu voios comment à partir d'une infinité de règles, j'en ai composé une seule, et qu'ainsi j'ai acquitté toute l'affaire. Il nous reste donc à traduire la règle par des exemples.

En Italie, Nicolo Tartaglia (1499-1557) dans son *General Trattato di numeri e misure* (1556) dresse deux tableaux : l'un correspond au triangle arithmétique utilisé dans un cadre algébrique et l'autre à une table des « variétés résultant des jets de 1, 2, ... , 8 dés ». Mais il n'assure aucun lien entre ces deux tableaux. Jérôme Cardan (1501 - 1576) adopte, quant à lui, un propos combinatoire dans son *Opus novum de proportionibus* qu'il publie en 1570 .

Le procédé de construction mérite d'être retenu puisqu'il correspond à la relation

$$\binom{n}{p-1} = \frac{n-p}{p+1}\binom{n}{p}$$

Triangle de la Coss
de Christophe Rudolff de Janer (1554)

x^2	2	1					
x^3	3	3	1				
x^4	4	6	4	1			
x^5	5	10	10	5	1		
x^6	6	15	20	15	6	1	
x^7	7	21	35	35	21	7	1

Triangle d'Adrien Romain
(1602)

(1)	(2)	(3)	(4)	
1	1	1	1	
1	2	3	4	&c.
	1	3	6	
		1	4	
			1	

Triangle de Tartaglia
(1556)

2
3 - 3
4 - 6 - 4
5 - 10 - 10 - 5
6 - 15 - 20 - 15 - 6
7 - 21 - 35 - 35 - 21 - 7
8 - 28 - 56 - 70 - 56 - 28 - 8
9 - 36 - 84 - 126 - 126 - 84 - 36 - 9
10 - 45 - 120 - 210 - 252 - 210 - 120 - 45 - 10
11 - 55 - 165 - 330 - 462 - 462 - 330 - 165 - 55 - 11
12 - 66 - 220 - 495 - 792 - 924 - 792 - 495 - 220 - 66 - 12

Des écrits en langue française doivent aussi être cités. Sans prétendre à l'exhaustion, avant Pascal nous pouvons considérer Jacques Peletier du Mans (1517 - 1582) Simon Stevin de Bruges (1548 - 1620) ou encore Albert Girard (1595 - 1632) : le second se place dans le cadre numérique de l'extraction des racines d'où une présentation assez originale tandis que le troisième préfère le cadre algébrique où, quelques lignes plus loin, il exprime le théorème fondamental de l'algèbre.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

XII Définition

Quand plusieurs unités sont mises comme à costé, & des autres nombres au milieu, trouvez par le moyen d'addition telle figure, soit appelée triangle d'extraction : & l'unité d'enhaut signifier l'arithmétique simple, & les autres pour l'algèbre ; assavoir 1, 1, soit dit le rang des (1) ; & 1, 2, 1,0 le rang des (2) ; puis 1, 3, 3, 1, soit appelé le rang des (3), & toujours ainsi à l'infiny.

I Theoreme

Si une multitude de nombres sont proposés, la multitude des produits de chacune faction se peut exposer par le triangle d'extraction : & par le rang d'iceluy selon la multitude des nombres.

Explication

Soyent 4 nombres, il faudra prendre le rang des (4) au triangle d'extraction, qui est 1, 4, 6 ,4 ,1 ; le premier 1 signifie l'unité de la maxime ; le 4 la première faction qui est la somme des 4 nombres ; le 6 signifie que la deuxième faction est composée de 6 produits de deux à deux ; et ainsi du reste.

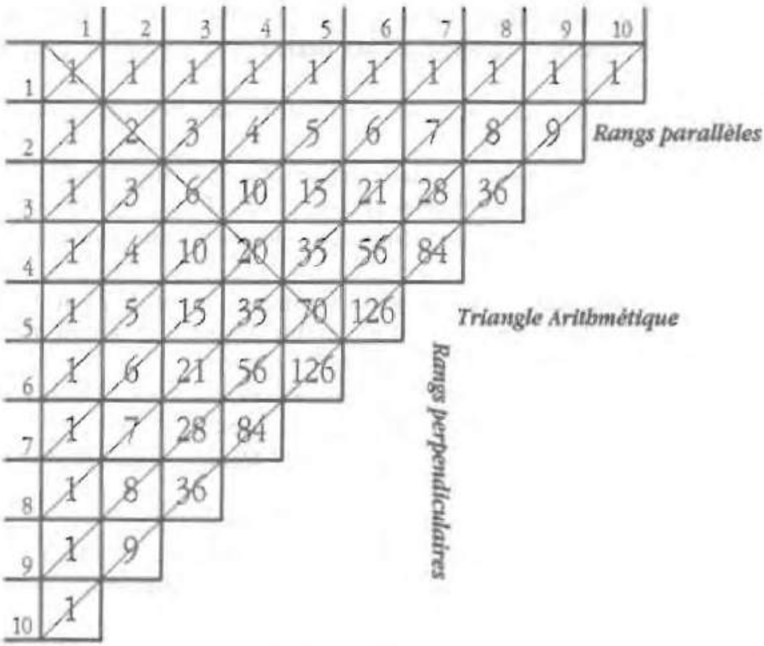
II Theoreme.

Toutes les equations d'algebre reçoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incomplettes : & la premiere faction des solutions est esgale au nombre du premier meslé, la seconde faction des mesmes, est esgale au nombre du deuxiesme meslé ; la troisiesme, au troisiesme, & toujours ainsi, tellement que la derniere faction est esgale à la fermeture, & ce selon les signes qui se peuvent remarquer en l'ordre alternatif.

Et Blaise Pascal (1623 - 1662) ? Trois ans après son décès paraît le *Traité Arithmétique avec quelques autres petits traités sur la même matière*. Mais, en 1654, est paru *Triangulus arithmeticus* , peu différent de l'écrit français : Pierre de Fermat (1601 - 1665) est peut être le seul savant à connaître cet ouvrage du vivant de son auteur. L'œuvre est suffisamment connue pour que nous nous attardions plus longtemps sur son contenu.

Au cours de notre promenade nous avons pu rencontrer divers savants utilisant le triangle arithmétique. Chacun d'entre eux s'est placé dans un cadre qui lui était propre. Il revenait à Pascal de relever magistralement diverses applications du triangle qui, à juste titre, porte aujourd'hui son nom.

Michel GUILLEMOT



BIBLIOGRAPHIE

Al-Khayyàm, O ; *L'œuvre algébrique d'al-Khayyàm* , établie, traduite et analysée par R. Rashed et A. Djebbar, Alep ; University of Allep, 1981.

Apian, P., *Ein newe vnd wolgegründte vnderweißung aller Kauffmans Rechnung in dreien Büchern* , Ingolstadt, 1527.

Bosmans, S., Note historique sur le triangle de Pascal *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* 31 (1906 - 07) 65 -74 .

Cardan, J., *Opus novum de proportionibus numerorum,...* Bâle, 1570 in Opera Omnia , Lyon, 1663, t.4, p.556-558.

Coumet, E., *Mersenne, Frénicle, et l'élaboration de l'analyse combinatoire dans la première moitié du XVII^{e} siècle* , Thèse 3ème cycle, Paris, 1968.

Djebbar, A., *L'analyse combinatoire dans l'enseignement d'Ibn Mun'im (XII^{e} - XIII^{e} siècle)* Université Paris Sud, 1985.

Djebbar, A., *Matériaux pour l'étude des démarches inductives et combinatoires dans la science arabe (IX^{e} - XV^{e} siècle)* Université Paris Sud, 1997.

Girard, A., *Invention nouvelle en l'algèbre* , Amsterdam, 1629.

Hoe, J., *Les systèmes d'équations polynômes dans le Siyuan Juyian (1903)* Paris, Presses Universitaires de France, 1977.

Lam Lay Yong., The Chinese connection beetwen the Pascal Triangle and the solution of numerical equations of any degree *Historia Mathematica 7 (1980)* 407 - 424 .

Lamrabet, D., *Introduction à l'histoire des mathématiques arabes* Université Mohamed V, 1994.

Martzloff, J.C., *Recherches sur l'oeuvre mathématique de Mei Wending (1633 - 1721)* Paris, Presses Universitaires de France, Paris, 1981 .

Martzloff, J.C., Li Shanlan, mathématicien chinois traditionnel *Pour la Science*, Mai 1988, 48 - 57.

Martzloff, J.C., *Histoire des mathématiques chinoises* , Paris, Masson, 1988.

Pascal, B., *Oeuvres complètes* , Texte établi présenté et annoté par J. Mesnard, Paris, Desclée de Brouwer, 1964.

Rashed, R., *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris , Les Belles Lettres, 1984 .

Rashed, R., (ed.) *Histoire des sciences arabes t.2 Mathématiques et physique Paris*, Seuil, 1997.

Scheubel, J., *De numeris et diversis rationibus* Leipzig, 1545.

Smith, D.E., *History of mathematics* 2 vol, New York, Dover, 1958.

Stevin, S., *Les œuvres mathématiques de Simon Stevin* augmentées par A., Girard, Leyde, 1625.

Stifel, M., *Arithmetica integra*, Nuremberg, 1544 (trad. Denis Daumas pour le texte cité)

Tartaglia, N., *General trattato di numeri et misure* 3 vol. Venise 1556 - 1560.

Tropfke, J., *Geschichte der Elementarmathematik* , 4e ed., vol.1, Arithmetik und algebra, Berlin, De Gruyter, 1980.

Youschevitch, A., *Les mathématiques arabes (VIII^{e} - XV^{e} siècles)* traduction par M. Cazenave, K. Jaouiche, Paris, Vrin, 1976.