Atelier A 19

Les PARADOXES

Arnaud Gazagnes

Un paradoxe est un raisonnement qui, au premier abord, semble faux mais qui en fait est vrai, ou qui semble vrai, mais qui, en réalité, est faux ou simplement contradictoire.

Dans un premier temps, nous avons étudié quelques morceaux du "hit-paradoxe" empruntés, pour la plupart, à la culture philosophique grecque, dont les suivants :

> Epiménide, poète crétois (–IVᵉ siècle) énonce : « *Tous les crétois sont menteurs* »
> Le problème d'Achille et la tortue : Achille ne pourra jamais la rattraper (Zénon d'Elée).
> Un adage bien connu : « *Toutes les règles ont des exceptions* ».

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à des paradoxes utilisés comme outils d'enseignement. Un paradoxe est instructif car, pour mettre en évidence l'erreur commise dans la marche d'un raisonnement, il faut étudier de près les arguments (faux) qui entrent en jeu : division par 0, raisonnement sur une figure fausse,... Il est aussi instructif car il montre comment le raisonnement peut être faussé par un jugement précipité : on arrive à une conclusion erronée parce que l'on n'a pas analysé avec soin tous les aspects du problème. Tous ces problèmes avaient été donnés aux élèves avec la consigne suivante : « *Trouver l'erreur de raisonnement et donner la correction* ».

En probabilités

P1 - Problème de d'Alembert

« En lançant deux fois la même pièce de monnaie, j'obtiendrai trois issues : Pile-Pile, Pile-Face et Face-Face. J'ai donc une chance sur trois d'obtenir deux côtés différents ».

P2 - Les trois portes, deux chèvres et la voiture

« J'ai devant moi trois portes : derrière l'une d'elles se trouve la voiture de mes rêves, derrière chacune des deux autres, se trouve une chèvre. Je choisis une porte. L'animateur ouvre l'une des deux autres portes : il y a une chèvre ... Il me propose de retenter ma chance. La proposition de l'animateur ne m'apporte rien : il y a derrière chacune des deux portes soit la voiture soit l'autre chèvre. J'ai donc une chance sur deux de gagner, alors pourquoi changer mon choix ? »

En algèbre ...

P3 - 2 = 1

« Supposez que :	$a = b$
En multipliant les deux nombres par a, on a :	$a^2 = ab$
En soustrayant b^2 des deux membres, on a :	$a^2 - b^2 = ab - b^2$
En factorisant, on a :	$(a + b)(a - b) = b\,(a - b)$
En divisant les deux membres par $a - b$, on a :	$a + b = b$
Si, maintenant, on prend $a = b = 1$, on a :	$2 = 1$.

P3 - 7 = 13

« On veut résoudre l'équation : $$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{40-4x}{x-13}.$$

Elle peut s'écrire : $$\frac{x+5-5\,(x-7)}{x-7} - 5 = \frac{40-4x}{x-13}$$

ou encore : $$\frac{-4x+40}{x-7} = \frac{40-4x}{x-13}$$

Puisque maintenant, les deux numérateurs sont égaux, les dénominateurs le sont aussi, c'est-à-dire que : $x - 7 = x - 13$, ou, en retranchant x aux deux membres , puis en prenant les opposés des deux entiers, on a $7 = 13$. »

En géométrie ...

P5 - Un angle droit est égal à un angle obtus (Lewis CARROLL)

« Soit $ABCD$ un rectangle quelconque (*Figure 1*). Construire un segment $[BE]$ à l'extérieur du rectangle, de longueur BC (donc AD). Tracer les médiatrices de $[DE]$ et $[AB]$. Puisque ces droites sont perpendiculaires à des droites non parallèles, elles doivent se rencontrer en un point P. Tracer $[AP]$, $[BP]$, $[DP]$ et $[EP]$. Dabns les triangles ADP et

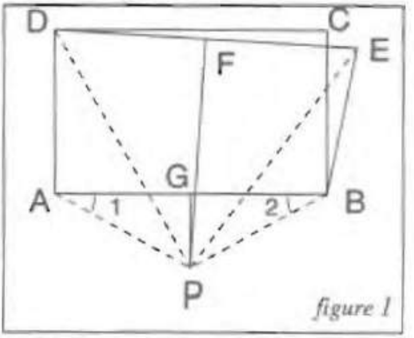

figure 1

BPE, on a $AD = BE$ par construction. On a aussi $AP = BP$ et $DP = EP$ car tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités du segment. Puisque les trois côtés du triangle ADP sont égaux respectivement aux trois côtés du triangle BPE, ces triangles sont égaux. Par conséquent : $\widehat{DAP} = \widehat{EBP}$ (1). Mais $\hat{1} = \hat{2}$ (2) car dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux. En soustrayant (2) de (1), nous trouvons que $\widehat{DAG}$ (angle droit donné) est égal à $\widehat{EBG}$ (angle obtus par construction). »

P6 - L'escalier

« On construit un triangle rectangle de côté 1 ; son hypoténuse mesure $\sqrt{2}$ *(figure 2a)*. On a ensuite tracé la ligne brisée L1 en commençant à l'angle en bas à gauche, partant 1/4 vers le haut, 1/2 vers la droite, 1/2 vers le haut, 1/2 vers la droite et 1/4 vers le haut *(figure 2b)*. On a doublé le nombre de gradins, et ainsi de suite *(figures 2 c et d)*. On construit une ligne L(n) de lignes brisées. Cette suite tend vers une limite la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle $\sqrt{2}$. »

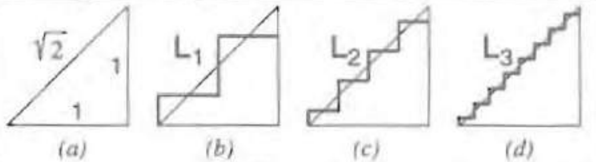

figure 2

P7 - 64 = 65« On considère un carré de 8 cm de côté découpé en deux triangles et 2 trapèzes *(figure 3a)*. En disposant différemment ces 4 morceaux *(figure 3b)*, on obtient un rectangle de côtés 13 et 5. En égalant les aires des deux quadrilatères, puisqu'il y a conservation des aires, on a : $8 \times 8 = 5 \times 13$ ou $64 = 65$. »

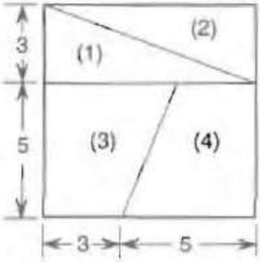

figure 3a

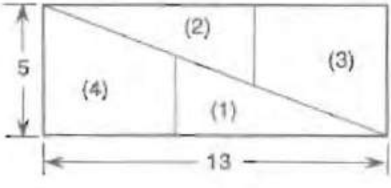

figure 3b