Atelier A 11

IDÉCIMALITÉ et RACINE CARRÉE

Alain Bronner
IUFM et IREM de Montpellier

Introduction

Tout projet d'enseignement *des nombres et du calcul*, au niveau du collège et du lycée, est confronté au problème didactique du choix de la nature et de la mise en place d'un *espace numérique* plus vaste que celui organisé autour des nombres rationnels. L'atelier avait pour but de mettre en évidence les choix fondamentaux de quelques projets d'enseignement du Numérique à diverses périodes. J'ai essayé de faire ressortir le rôle fondamental de deux objets, à savoir « la racine carrée » et les « nombres décimaux », dans ces problématiques. Je montre notamment qu'il se constitue actuellement au niveau de l'enseignement secondaire des *vides didactiques institutionnels* dans le passage des nombres décimaux aux nombres irrationnels.

Cette analyse s'appuie sur mon travail de thèse[1] et on pourra s'y reporter pour de plus amples développements.

L'enseignement des Nombres et du Calcul à travers les âges

L'institution d'enseignement, l'Enseignement Mathématique Secondaire - noté dans la suite EMS -, se distingue par sa régularité à proposer une réforme avec une période d'une dizaine d'années depuis cinquante ans.

A la période classique (1854-1947) la problématique de la mesure reste sous-jacente à la construction du Numérique montrant toujours une filiation avec la théorie euclidienne. A partir des fondations constituées par les nombres fractionnaires, l'objet « racine carrée » s'impose sous la forme d'un algorithme, dit « méthode d'extraction », qui disparaîtra dans les années soixante. Cet objet conduit à une première extension de l'espace numérique sous les traits des *racines carrées incommensurables*. Ces dernières vont per-

[1] Alain Bronner, *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*, Thèse de didactique des mathématiques, Université J. Fourrier, Grenoble, 1997.

mettre une nouvelle extension du Numérique vers les *nombres incommensurables.*

Dans la période de la préparation de la réforme des mathématiques modernes (1958/68), l'organisation classique s'effondre. En effet les ensembles structurés de nombres font leur apparition bien avant la dite réforme. Les propriétés de ces ensembles munis de ces lois vont être énumérées selon les structures de l'algèbre moderne. L'enseignement s'appuie sur la classification rationnel/irrationnel alors qu'il ne figure aucune ligne de programme à ce sujet. Ce thème est toujours lié au problème de l'existence de racines carrées de nombres non carrés.

La période des mathématiques modernes sanctionne une évolution de la constitution du Numérique dans l'institution EMS en réduisant le plus tôt possible et au plus près la distance avec le savoir mathématique de référence. L'institution fait alors jouer un rôle fondamental à des nombres qui restent souvent dans l'ombre : les nombres non décimaux que j'appelle les nombres idécimaux. En effet les nouveaux programmes (arrêté du 22 juillet 1971) demandent d'introduire les nombres réels, sous la forme de « suites décimales illimitées » dès la classe de Quatrième en suivant un plan précis d'enseignement. Il est suggéré de montrer la nécessité d'introduire des nombres idécimaux. Cette nécessité est notamment motivée par deux problèmes :
- la recherche de l'inverse d'un décimal strictement positif dans le cas où cet inverse n'est pas décimal ;
- l'existence de la racine carrée de certains décimaux.

La période de fermeture de la réforme des mathématiquesmodernes (1977/1985) s'inscrit dans un recul de la théorie élémentaire des ensembles et des relations, ainsi que des structures. Les décimaux restent les fondements du Numérique dans le savoir à enseigner au début du collège (Sixième et Cinquième) mais un changement de problématique se dessine sans que l'on puisse bien en préciser les contours. La référence aux réels se résume pratiquement à la lacunaire expression « *pratique des opérations sur les rationnels, sur les réels* ». Je qualifie ce phénomène de ***vide didactique institutionnel*** dans l'institution officielle EMS. La seule voie officielle que l'on peut déceler est le recours à la droite. Son étude n'attend plus la mise en place de l'ensemble $\mathbb{R}$. Les instructions suggèrent de mener de front l'étude du calcul et de la géométrie. Les notions d'ordre sur la droite et sur $\mathbb{R}$ pourront « *s'éclairer mutuellement* ».

Dans la période actuelle des changements importants apparaissent sous l'effet des nouveaux programmes du collège, mis en œuvre à partir de la Sixième à la rentrée 1986 (Arrêté du 14 novembre 1985). Les transformations d'écriture des nombres prennent une place et un rôle prépondérant dans cette période.

La problématique d'extension des systèmes de nombres, apparue dans les années soixante, puis ralentie dans la période précédente, est stoppée dans cette période. Parallèlement, la nature des nombres se trouve mise à l'écart, et l'arithmétique est rejetée de tous les niveaux d'enseignement. Un effet de cette évolution peut être remarqué à travers n'importe quel manuel de Troisième. Quand une propriété est énoncée, par exemple[2] :

« *Quels que soient les nombres a, b et c : si* $a \leqslant b$ *alors* $a + c \leqslant b + c$ »,
elle est formulée sans domaine de référence et sans faire intervenir la nature des nombres. Implicitement, les auteurs laissent circuler l'idée que ces propriétés peuvent s'appliquer à tous les nombres rencontrés, et en particulier aux racines carrées par exemple.

Déjà se dessinait un flottement à propos des nombres réels dans la période précédente où le statut des réels n'était plus aussi délimité que dans la période des années soixante-dix. Dans les programmes du collège, on ne trouve même plus l'expression « nombres réels ». Les nombres réels ne sont toujours pas un objet d'enseignement en Seconde. Paradoxalement, les désignations des ensembles de nombres sont introduites : « *s'ajoutent en Seconde, ..., les notations* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$; *sur ces différents points, il s'agit d'un simple vocabulaire et aucun développement n'est au programme* ». La désignation $\mathbb{D}$ et l'ensemble des nombres décimaux sont encore oubliés des commentaires, alors qu'ils ont joué un rôle essentiel dans les « Travaux numériques » au collège. Au lycée, l'ensemble $\mathbb{R}$ apparaît comme « un grand fourre-tout »[3] qui s'élabore sur une notion préconstruite de « nombre », indépendant de sa nature arithmétique, et où les règles de calcul vont être officialisées une fois pour toutes

Sur une idée assez vague de « nombre » et sur les fondations organisées autour des nombres décimaux, le Numérique va se développer dans une problématique que je qualifie d'algébrique. L'institution EMS amplifie, dans cette période, le « vide didactique » sur l'objet « nombre réel ».

Conclusion

Je fais l'hypothèse que les effets de la réforme des mathématiques modernes ont été tels que les agents didactiques « auteurs de programme »

[2] G. Bonnefond, D. Daviaud, B. Revranche, *Mathématiques Troisième*, collection Pythagore, Hatier, 1989.

[3] Selon l'expression des auteurs du manuel Hachette pour la classe de Seconde.

ont été conduits à produire ce *vide didactique institutionnel* relativement à l'objet « nombre réel ». Ce vide est encore effectif, soit vingt ans après la fermeture de cette réforme. Les problèmes d'enseignement et d'apprentissage qu'a engendrés la réforme des mathématiques modernes sont réglés par ce vide, laissant aux enseignants la responsabilité complète d'une transposition des réels en classe et faisant apparaître une grande ouverture sur les enseignements proposés [4], et notamment sur les tentatives de réduction de ce vide.

Le retour de l'arithmétique permet d'envisager des reprises possibles d'apprentissages sur les Nombres et le Calcul.

[4] On pourra voir une étude montrant la variété des approches découlant de ce vide au niveau des enseignants de Troisième et de Seconde dans Bronner (1998), *Les rapports d'enseignants de Troisième et de Seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée »*, Revue RDM N°173, La pensée sauvage, Grenoble.