



Conférence du dimanche 26
octobre

Mathématiques et Informatique Graphique

Jean-Louis Maltret

Département Mathématique-Informatique
163 Avenue de Luminy 13009 Marseille
jlm@lumimath.univ-mrs.fr

Jean-Louis MALTRET est maître de conférence à l'Université de la Méditerranée.

Ingénieur Ecole Centrale de Paris, responsable informatique du Centre International de Rencontres Mathématiques à Marseille-Luminy, il exerce ses activités de recherche dans le cadre du GAMSAU (Ecole d'architecture de Marseille), où ses domaines d'intérêt portent sur la modélisation géométrique et les images de synthèse appliquées à l'architecture.

Les ordinateurs actuels ayant dans beaucoup de cas l'écran comme dispositif principal de sortie, le rôle des images produites et affichées est de plus en plus important ces dernières années. La place des outils mathématiques employés dans ce domaine y est devenue prépondérante, sans que les utilisateurs en perçoivent toujours tous les aspects.

Pour consulter certaines illustrations on pourra se reporter à la version sur serveur [17].

1. Introduction.

L'informatique graphique recouvre plusieurs notions qu'on peut classer sommairement de la façon suivante, bien que bon nombre de logiciels fassent appel à une combinaison de différentes techniques :

- la *modélisation géométrique* concerne les propriétés des courbes, surfaces et polyèdres.
- la *géométrie algorithmique* est l'ensemble des méthodes

pour traiter des objets géométriques : intersections, triangulations, enveloppes convexes,...

- la *synthèse d'images* permet de produire des images à partir de modèles
- le *traitement d'images* autorise des modifications automatiques sur des images en général acquises par mesures : segmentation, filtrage, reconnaissance de formes.

On n'abordera ici que les trois premiers points. Sur le plan pratique se posent aussi nombre de problèmes d'implémentation, de nature plus spécifiquement informatique : structures de données, gestion de bases de données, complexité.

En guise de préambule considérons deux problèmes graphiques récréatifs :

L'anneau de Dirichlet

Soient 650 points répartis aléatoirement dans un disque de rayon 16 et soit une couronne de diamètre intérieur 2 et de diamètre extérieur 3.

On peut poser la couronne dans le disque pour qu'elle recouvre au moins 10 points.

La démonstration [17], qui fait appel à une analyse d'un régionallement du disque, est remarquable car le caractère aléatoire des points n'intervient pas et surtout elle est non constructive, ne fournissant aucune méthode pour trouver la position de la couronne. En effet elle utilise le principe dit « des trous de pigeons », pour lequel une fonction n'est pas injective si le cardinal de l'ensemble de départ est supérieur à celui de l'ensemble d'arrivée. En ce sens ce problème est typique de ce qui n'est pas abordable informatiquement, tout au moins de façon directe (on pourrait toujours tenter une recherche exhaustive mais $C_{650}^{10} \cong 3 \times 10^{21}$)

Un problème de couplage

Soient n points blancs et n points noirs, quelconques, dans le plan.

On peut tracer n segments joignant un point blanc à un point noir et qui ne se coupent pas.

Là encore, la démonstration [17], utilisant l'enveloppe convexe des points et le théorème de la valeur intermédiaire pour une ligne de balayage dans le plan, n'est pas constructive. Mais ici, pour une direction de balayage fixée, on n'a qu'un nombre fini de droites à considérer et le problème peut se résoudre par recherche exhaustive si n n'est pas trop grand.

2. Modélisation et CAO.

2.1. La topologie.

On cherche des conditions raisonnables pouvant être satisfaites par des parties de \mathbb{R}^3 .. On s'accorde en général sur les solides valides qui sont les *parties régulières* :

- elles coïncident avec l'adhérence de leur intérieur = pas d'arêtes ou de faces *pendantes* (i. e. d'intérieur vide)
- leur frontière est rare = pas de bord trop tourmenté. L'exemple fondamental est celui des ensembles *semi-algébriques*, satisfaisant un nombre fini de contraintes inégalités polynomiales (polyèdres, quadriques, tores, ...).

Un exercice classique de topologie montre qu'on peut trouver des ensembles tels que $A, \overset{o}{A}, \overline{A}, \overset{a}{A}, \overset{p}{A}, \overset{d}{A}, \overline{\overset{a}{A}}$ soient tous différents. On effectue

donc systématiquement une opération de *régularisation* : $r(A) = \overline{\overset{a}{A}}$, et les *opérations booléennes sont régularisées* (adhérence de l'intérieur) pour avoir un anneau de parties régulières.

On fait alors agir un groupe de transformations : groupe projectif, groupe affine, un sous-groupe ou des extensions (ex. : inversions).

Dans ce cadre-là trois techniques principales sont utilisées :

- la *géométrie solide constructive* (CSG) : on dispose de primitives volumiques paramétrées, de transformations géométriques et d'opérations booléennes (union, intersection, différence).
- la *représentation par frontière* (B-rep) : tout est modélisé par des polyèdres à facettes planes ou non.
- la *décomposition cellulaire* : on fait des unions disjointes de primitives simples, regroupées souvent en arbres octaux (décomposition récursive de l'espace suivant les trois coordonnées).

Les problèmes

- en pratique, la coexistence de plusieurs types de primitives aboutit à des *modèles hybrides* mais le maintien de plusieurs structures nécessite une *conversion entre modèles*, ce qui est réalisable dans certains sens, mais très difficile ou impossible dans d'autres.
- les modèles sont le plus souvent entièrement géométriques, on a une *quasi-absence de la topologie* au niveau utilisateur, alors qu'elle correspond souvent à une certaine intuition.
- beaucoup de modélisateurs particuliers sont adaptés à leur objectif, créant des *incohérences de la représentation*, par manque de rigueur du cadre théorique.

2.3. La géométrie.

Les courbes et surfaces sont traitées de plusieurs points de vue:

- implicites : propriétés globales, point de vue volumique,
- paramétriques : propriétés locales, point de vue frontière,
- algébriques : facilité de calculs de polynômes,
- rationnelles : plus grande souplesse.

Suivant les problèmes abordés on fait des choix adaptés pour effectuer par exemple :

- des calculs d'intersection droites-surfaces (plus facile en implicite)
- l'évaluation de points dans un domaine donné (plus facile en paramétrique)
- le calcul de l'intersection entre deux surfaces (plus facile si l'une est implicite et l'autre paramétrique)

La très grande majorité des techniques paramétriques employées aujourd'hui utilisent un ensemble de fonctions de base qui sont principalement:

- les *polynômes de Bernstein*

Ils sont définis par $B_i^k(t) = C_k^i t^i (1-t)^{k-i}$

ou $B_i^k(t) = t B_{i-1}^{k-1}(t) + (1-t) B_{i+1}^{k-1}(t)$

Ce sont eux qui interviennent dans l'une des démonstrations (constructive) du théorème de Stone-Weierstrass grâce aux relations :

$$\sum_{i=0}^k B_i^k(t) = 1 \quad ; \quad \sum_{i=0}^k \frac{1}{k} B_i^k(t) = t \quad ; \quad \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{k}\right)^2 B_i^k(t) = \frac{k-1}{k} t^2 + \frac{1}{k}$$

- les *fonctions B-splines*

Pour (t_0, t_1, \dots, t_m) suite croissante de *nœuds* on définit récursivement $B_{0,i}$ fonction caractéristique de $[t_i, t_{i+1}[$ puis

$$B_{k,i}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{k-1,i}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} + t_{i+1}} B_{k-1,i+1}(t).$$

Ce sont des fonctions *polynômiales par morceaux* de degré k , dont les polynômes de Bernstein de degré k sont le cas particulier obtenu pour $t_0 = \dots = t_k = 0, t_{k+1} = \dots = t_{2k+1} = 1$. Les courbes qu'on manipule sont définies par ces fonctions de base et des *points de contrôle* P_k . La courbe C associée est définie paramétriquement sur l'intervalle où la somme des

fonctions B-Splines correspondantes vaut 1 par $M(t) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} B_k(t) P_k$.

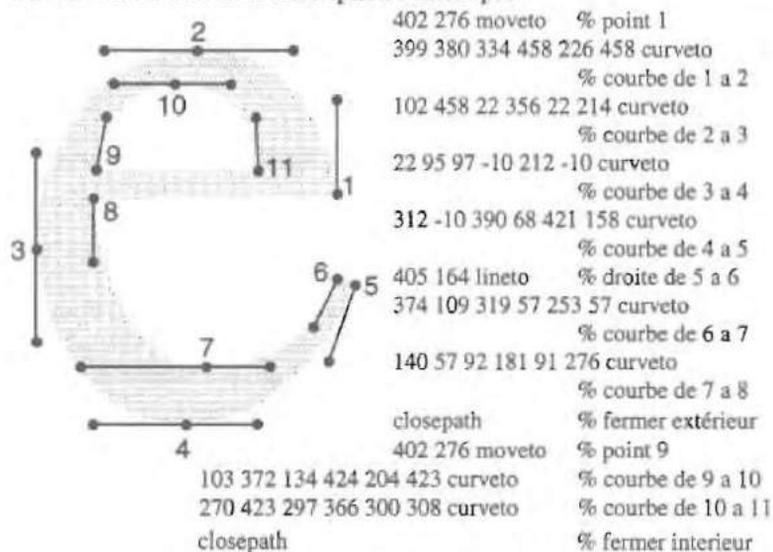
On a un barycentre des P_k à coefficients $B_k(t)$: c'est donc une *définition affine*.

Les propriétés

- 1 - la courbe est entièrement contenue dans l'enveloppe convexe des P_k (car les coefficients des P_k sont compris entre 0 et 1 avec une somme égale à 1).
- 2 - on a un contrôle *local* de la courbe, *pseudo-local* pour les courbes de Bezier.
- 3 - *invariance affine* : pour T transformation affine, si $P'_k = T(P_k)$ on a $C' = T(C)$.
- 4 - la courbe ne dépend que de la *position relative des nœuds* : invariance par translation ou homothétie.
- 5 - on a une courbe à *extrémités flottantes* quand le premier ou le dernier nœud est de multiplicité $k + 1$ (les courbes de Bezier en sont un cas particulier).
- 6 - *diminution de la variation* : une droite coupe la courbe en moins de points que le polygone de contrôle.

Exemple d'application : les dessins des polices de caractères (logiciels typographiques ou Postscript), degré 3 en général, le degré 5 est à l'étude pour les usages particuliers (imitation de caractères manuscrits).

Un « e » minuscule et sa description Postscript :



Les courbes rationnelles

Connues sous le nom de « NURBS » (B-splines rationnelles non-uniformes), elles sont utilisées dans beaucoup de systèmes d'animation ou de modélisation car elles permettent une très grande variété de formes et de déformations.

Le paramétrage est obtenu par le rapport de 2 polynômes :

$$x(t) = \frac{\sum_{k=0}^{k=m} B_m^k(t) x_k}{\sum_{k=0}^{k=m} B_m^k(t) w_k} \quad y(t) = \frac{\sum_{k=0}^{k=m} B_m^k(t) y_k}{\sum_{k=0}^{k=m} B_m^k(t) w_k}$$

où x_k, y_k, w_k sont les coordonnées homogènes du point de contrôle P_k .

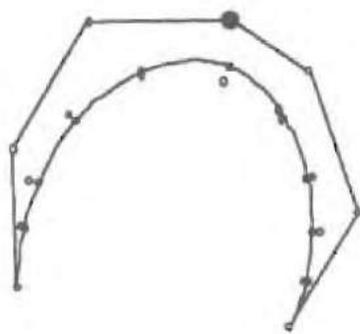
Si $w_k = 1$, on a le cas habituel, la courbe est polynomiale par morceaux, $w_k > 1$ donne une courbe plus proche de P_k , $w_k < 1$ donne une courbe moins proche de P_k .

On a deux cas limites : $w_k = 0$, le point de contrôle P_k n'a plus d'influence, w_k infini, la courbe passe par P_k .

On peut voir l'influence des points de contrôle et des poids :



Changement d'un point



Changement d'un poids

Exemple : les courbes de Bezier rationnelles

Les courbes de Bezier de degré 2 (3 points de contrôle) sont des paraboles. En passant à une paramétrisation rationnelle on fait une transformation projective donc on obtient des coniques.

Pour $w_0 = w_2 = 1, w_1 = \sqrt{2}$ on a un cercle de paramétrisation :

$$x = \frac{(1 - \sqrt{2})t^2 + (\sqrt{2} - 2)t + 1}{(2 - \sqrt{2})t^2 + (\sqrt{2} - 2)t + 1}, y = \frac{(1 - \sqrt{2})t^2 + \sqrt{2}t}{(2 - \sqrt{2})t^2 + (\sqrt{2} - 2)t + 1}$$

A comparer avec le paramétrage standard $x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$; $y = \frac{2u}{1 + u^2}$, mais il

s'agit seulement du changement de paramètre $u = \frac{(-1 - \sqrt{2})t}{t - 2 - \sqrt{2}}$.

Définition des surfaces

On a plusieurs moyens pour passer des courbes aux surfaces :

- *Produits tensoriels*

Pour un polyèdre de contrôle : P_{00}, \dots, P_{mn} et deux vecteurs des nœuds, la surface associée est définie paramétriquement sur le domaine où la somme des fonctions correspondantes vaut 1 :

$$M(u, v) = \sum_{i,j} B_i(u) B_j(v) P_{i,j} \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$$

On a des propriétés analogues aux courbes: enveloppe convexe, *invariance affine*, contrôle local.

- *Splines triangulaires*

Pour deux paramètres un domaine triangulaire est plus naturel mais oblige à utiliser des coordonnées barycentriques. Par exemple la généralisation de Bezier au cas triangulaire peut s'écrire:

$$B_{i,j,k}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i! j! k!} u^i v^j w^k \quad i + j + k = n \quad u + v + w = 1$$

$$M(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) P_{i,j,k} \quad u + v + w = 1$$

Les autres méthodes consistent à construire des objets complexes à partir d'objets plus simples

- *Interpolation d'Hermite-Ferguson :*

On construit une courbe ou une surface dont on connaît les valeurs et les dérivées au bord.

En dimension 2 :

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ D_0 \\ D_1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En dimension 3 :

$$M(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & D_{00,v} & D_{01,v} \\ P_{10} & P_{11} & D_{10,u} & D_{11,u} \\ D_{00,u} & D_{01,u} & T_{00} & T_{01} \\ D_{10,u} & D_{11,u} & T_{10} & T_{11} \end{pmatrix} H^T = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

Inconvénient : on n'a pas la propriété d'enveloppe convexe.

• *Processus de Coons* :

On construit une surface s'appuyant sur 4 courbes qui se raccordent aux points M_1, M_2, M_3, M_4 .

$$M(u, v) = (1-v) C_1(u) + v C_2(u) + (1-u) C_3(v) + u C_4(v) \\ - (1-u)(1-v) M_1 - (1-u)v M_2 - u(1-v) M_4 - uv M_3$$

• *Cyclides de Dupin*

(Dupin, C. *Applications de la Géométrie et de la Mécanique*. Bachelier Paris, 1822)

Dans l'aéronautique existaient des habitudes de dessins basés sur des cercles. Si on considère des tores (avec 0, 1 ou 2 points singuliers) les méridiens et parallèles sont des cercles, lignes de courbure de la surface. Par *inversion de pôle intérieur ou extérieur au tore* les cercles sont transformés en cercles et on a une équation implicite de degré 4. Ces surfaces peuvent aussi être mises sous forme NURBS (Bezier rationnelle biquadratique) : équations simples lorsque les 4 bords sont des arcs de cercle représentables par des courbes de Bezier de degré 2. Elles servent, entre autres, à faire des raccords de surfaces contenant des cercles (cylindres, cônes, sphères).

Les applications :

- *Interpolation* : satisfaction d'un nombre fini de contraintes algébriques.
- *Approximation* : minimisation d'une norme convenable.

On a un grand nombre de degrés de liberté:

- choix du degré
- choix des nœuds (uniforme ou adapté) = choix d'un modèle
- type d'approximation = choix d'optimisation

L'une des difficultés est celle des *oscillations parasites* qui sont de nature analogue aux phénomènes de Gibbs (série de Fourier d'une fonction non continue) et de Runge (interpolation polynomiale d'une fonction tendant vers 0 à l'infini).

Les problèmes difficiles :

- *le raccordement de surfaces :*

Paramétriquement on raccorde des carreaux avec des bords donnés et des conditions au bord : on cherche la continuité analytique C^k et surtout la continuité géométrique G^k .

Pour des surfaces implicites on peut par contre faire assez facilement des mélanges en combinant linéairement des équations.

On a ainsi l'approximation d'un cube (sorte de dé à jouer) :

$$(x-a)(x+a)(y-a)(y+a)(z-a)(z+a) - 0.1a^6 = 0$$

ou celle d'une voûte d'arêtes:

$$(1-\lambda)(x^2+z^2-1)(y^2+z^2-1) - \lambda(x^2+y^2+z^2-0.5)^2 = 0.$$

- *l'intersection de surfaces :*

On peut avoir non-connexité, des singularités (points doubles, rebroussements, auto-tangences). De plus le choix de la représentation, paramétrique ou implicite, intervient.

Un calcul aussi simple que celui de

$$x(x-1)(x+1)y(y-1)(y+1) + 0.05 = 0$$

fait déjà apparaître 2 composantes bornées, 6 composantes non-bornées et 6 asymptotes.

Les méthodes algébriques calculent le résultant ou résolvant d'équations polynomiales, mais est difficilement applicable aux degrés élevés, le suivi de contours résout un système différentiel, les subdivisions, fixes ou adaptées, sont utilisées couramment dans les logiciels graphiques, avec un bonheur très relatif pour traiter les cas particuliers et les singularités.

- *la précision numérique*

c'est avant tout la gestion des cas particuliers, ceux qu'on connaît bien en géométrie (qu'est-ce qu'un triangle quelconque?) ; ceci conduit aux notions de « Vrai en général » ou « Faux en général », et son traitement correct influe grandement sur la fiabilité des logiciels.

- *le contrôle de la qualité*

Comment juger l'esthétique d'une surface? L'œil apprécie difficilement les changements de courbure.

- * On peut tracer les lignes *de courbure moyenne nulle* (points paraboliques). Félix Klein avait proposé de l'appliquer à une statue célèbre (Apollon du belvédère, musée du Vatican) mais le résultat ne semblait pas significatif.
- * On utilise plutôt les *lignes de réflexion*. Une famille de lignes parallèles est vue par réflexion dans la surface à vérifier: leurs défauts permettent d'estimer ceux de la surface.

Les perspectives :

- les modeleurs déclaratifs proposent une *solution combinatoire* aux demandes de l'utilisateur
- les modeleurs sous contraintes résolvent des *systèmes d'équations* pour les objets à concevoir
- les modeleurs à base projective où la programmation est simplifiée par l'absence des cas particuliers présentés par les parallèles (les points à l'infini sont des points comme les autres). Les propriétés projectives, *incidence, colinéarité, position relative* donnent des relations linéaires au lieu de relations métriques non-linéaires.

Enfin il faut noter l'usage occasionnel de *représentations non-standard*, où l'on n'est plus dans \mathbb{R}^3 euclidien :

- la *géométrie hyperbolique* permet d'avoir un espace non-homogène, d'où une possibilité naturelle de zoom, analogue à la vision "fisheye".
- la *géométrie en dimension 4* ouvre des possibilités mais avec une interaction délicate ; elle avait eu en son temps la faveur des surréalistes (Salvador Dalí *Corpus Hypercubicus*, 1954, Metropolitan Museum of Art, représentant une crucifixion sur un 4-hypercube).

3. Géométrie algorithmique.

Traditionnellement classée en informatique, appelée « computational geometry » en anglais, c'est l'ensemble des méthodes qui permettent d'effectuer, *par algorithmes*, des opérations sur des objets géométriques. On peut donner les exemples suivants de problèmes, de leurs applications et des outils géométriques employés.

3.1. Intersection de segments.

Les applications sont multiples : recherche de lignes cachées, intersection de polyèdres pour les modèles à facettes.

Un problème typique, la « traversée de segments » : trouver une droite dans le plan qui intersecte un ensemble donné de segments, par exemple tous parallèles. On effectue pour cela une *transformation par dualité* (celle qu'on

appelait jadis « par polaires réciproques »), les points se transforment en droites, les segments se transforment en zones angulaires ou en bandes, la droite traversante devient un point dans l'intersection des zones et on a donc réduit le problème à trouver un point dans l'intersection de régions du plan.

3.2. Diagrammes de proximité.

Egalement connus sous le nom de diagrammes de Voronoï ou régions de Dirichlet, ils interviennent dans toutes les questions du type « quel est le bureau de poste le plus proche de chez moi ? » et mettent en œuvre un régionallement du plan ou de l'espace suivant des critères de distance.

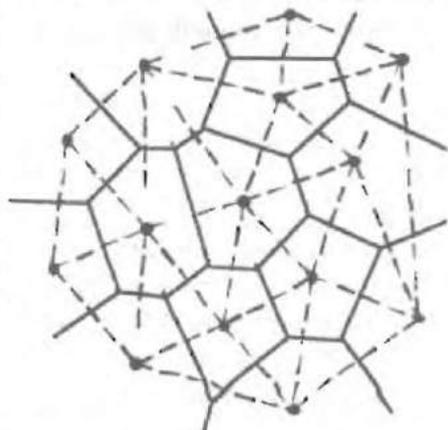
On peut citer par exemple :

- en histoire, l'étude des zones d'influence des villages du Latium pour expliquer l'émergence de Rome
- en économie, les critères de partage des zones d'extraction du pétrole dans la Mer du Nord
- en agriculture, l'étude du développement des plantes en concurrence pour leur croissance.

Une définition générale est la suivante: pour un ensemble d'objets géométriques $S = \{s_i\}$ (sites) et pour une distance d on associe à chaque s_i une région $V_i = \{x ; \forall j \neq i, d(x, s_i) \leq d(x, s_j)\}$.

Le cas classique est celui où les s_i sont des points de \mathbb{R}^d et où d est la distance euclidienne, les lignes à égale distance des sites sont alors les médianes des segments qui les joignent et les V_i sont des polygones convexes si on est dans le plan, des polyèdres convexes en dimension supérieure.

On associe à un diagramme de Voronoï classique $V(S)$ une triangulation $D(S)$ dite de *Delaunay* par dualité de graphe : les régions de Voronoï sont les sommets de Delaunay et réciproquement, les arêtes se correspondent pour des régions contiguës. Cette triangulation a la propriété d'être la plus proche du critère d'équiangularité et elle est très utilisée pour les maillages nécessités par les calculs d'éléments finis.



On a un lien intéressant avec les enveloppes convexes par la construction suivante :

Soit f_V une face de $V(S)$ (dimension k), et f_D la face duale de $D(S)$ (dimension $n - k$)

On effectue un relèvement parabolique de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^{n+1} .

$$p \mapsto p^+ \quad p = (p_1, \dots, p_n) \quad p^+ = (p_1, \dots, p_n, \sum_{j=1}^n p_j^2)$$

On définit la dualité $p \mapsto p^*$ par rapport au paraboloïde $U : x_{n+1} = \sum_{j=1}^n x_j^2$,

qui transforme les points en droites (plans, hyperplans) et la propriété « colinéaire » en « concourant ».

On définit $P = \{p^+ ; p \in S\}$, $P(S)$ enveloppe convexe de P , $H = \{(p^+)^* ; p \in S\}$ $H(S) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; x \text{ au-dessus de tous les } h \in H\}$ (enveloppe supérieure de H).

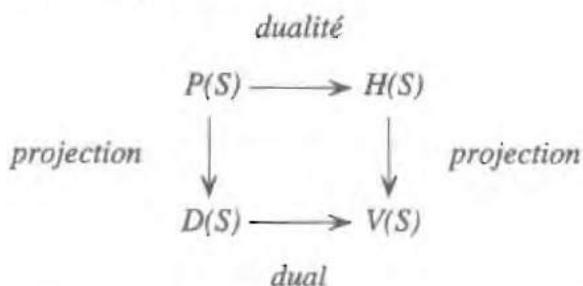
Propriété de la triangulation de Delaunay :

f_D est une face de $D(S)$ ssi elle est la projection d'une face inférieure de $P(S)$ sur $x_{n+1} = 0$.

Propriété du diagramme de Voronoï :

f_V est une face de $V(S)$ ssi elle est la projection d'une face de $H(S)$ sur $x_{n+1} = 0$.

On a ainsi les correspondances :



Une généralisation est celle des *diagrammes de puissances*, utilisés pour modéliser la croissance plus ou moins rapide des plantes. La distance est pondérée suivant les s_i : les lignes à égale distance des sites sont des cercles ($d(x, s_i) = k d(x, s_j)$), la région associée à s_i est une intersection de disques, non nécessairement convexe. Pour la construction on considère les

sphères passant par les cercles et un point I extérieur au plan. On fait une inversion de pôle I : le problème est transformé en calcul des intersections des faces planes d'un polyèdre avec la sphère inverse du plan. L'inversion du résultat donne les régions dans le plan.

4. Synthèse d'images.

Les calculs sont faits en prenant en compte un modèle d'éclairage, local ou global, qui peut tenir compte de l'optique géométrique : réflexion, transmission, absorption, coefficients de Fresnel, mais aussi ajouter des textures 2D ou 3D, déterministes ou aléatoires, avec des modèles empiriques d'ombrage.

Le modèle le plus élaboré est celui de l'illumination globale où l'on part de l'équation de radiance :

Si $f(x, D_i, D_o)$ est la fraction de l'énergie arrivant de la direction D_i au point x et repartant dans la direction D_o , on exprime la conservation de l'énergie :

$$E_o(x, D_o) = E_e(x, D_o) + \int f(x, D_i, D_o) E_i(x, D_i) \cos \theta_i d\omega$$

En fait l'énergie arrivant en x vient de y , à condition que y soit visible depuis x :

$$E_o(x, D_o) = E_e(x, D_o) + \int f(x, D_i, D_o) E_o(y, D_i) G(x, y) \cos \theta_i d\omega$$

On obtient une *Equation intégrale de Fredholm*.

Du point de vue de l'analyse fonctionnelle on peut écrire

$$E = E_e + KGE \quad E \in L^P$$

K opérateur intégral de réflexion locale, G opérateur "géométrique" de visibilité entre surfaces

On a une solution formelle en série de Neumann

$$E = (I + KG + (KG)^2 + \dots) E_e \quad \text{si } \|KG\| < 1.$$

Si on a seulement réflexion diffuse K est un opérateur *compact*. Si on prend en compte les phénomènes spéculaires on rajoute un opérateur S *non compact*.

Numériquement on utilise des techniques d'éléments finis, la fonction d'éclairage est approchée par une combinaison de fonctions de bases simples.

Le cas classique est celui où E est indépendante de la direction, f seulement diffuse et les surfaces discrétisées en éléments S_i . On a les inconnues B_i pour les éléments de surface S_i , l'équation devient

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_j F_{ij} B_j$$

où F_{ij} est le *facteur de forme*, dépendant seulement de la position relative et de la visibilité de l'élément S_j à partir de l'élément S_i .

On a un système linéaire à diagonale dominante car $p_i < 1$. Si n est petit (< 1000) on le résout directement. Pour $n < 100\,000$, on calcule une solution itérative obtenue à partir d'une estimation initiale. Pour n très grand on utilise des méthodes stochastiques, calculs d'intégrales par estimations aléatoires.

Les problèmes difficiles encore mal résolus concernent l'optique physique: diffraction, interférences, caustiques.

Quelques références

- BÉZIER, P. *Courbes et surfaces*, Hermès, 1985
 BOISSONNAT, J-D. YVINEC, M. *Géométrie algorithmique*, Ediscience, 1995
 COULOMB, J-L. SABONNADIÈRE, J-C. *Éléments finis et CAO*, Hermès, 1985
 FALCIDIENO, B. et al. (Eds.) *Computer graphics and mathematics*, Springer, 1992
 FARIN, G. *Courbes et surfaces pour la CGAO*, Masson, 1992
 FOLEY, J-D. VAN DAM, A. *Introduction à l'infographie*, Addison-Wesley, 1995
 GARDAN, Y. (ed.) *Mathématiques et CAO*, Vols 1 à 5, Hermès, 1986
 HILBERT, D. COHN-VOSSEN, S. *Geometry and the imagination*, Chelsea, 1952
 LIEBLING, T. ROTHLSBERGER, H. *Infographie et applications*, Masson, 1989
 MÄNTYLÄ, M. *An introduction to solid modeling*, Computer Science Press, 1988
 MARION, J. MODÉLISATION DES COURBES ET DES SURFACES, IREM Aix-Marseille, 1987
 PEROCHÉ, B. ARGENCE, J. GHAZANFARPOUR, D. MICHELLUCCI, D. *La synthèse d'images* 2ème édition, Hermès, 1996
 RISLER, J-J. *Méthodes mathématiques de la CAO*, Masson, 1994
 SEDGEWICK, R. *Algorithmes*, InterEditions, 1990
 SCHWEZER, P. *Infographie I, II*, Presses polytechniques romandes, 1988
 WATT, J. *Three-dimensional computer graphics*, Addison-Wesley, 1990
Mathématiques et Informatique Graphique, Journées de l'APMEP, 26 octobre 1997 Marseille.
<http://www.irem.univ-mrs.fr/~jlm/APM97/>