APMEP97 marseille

Conférence du Samedi 25 octobre

La formule de Black et Scholes

Etienne Pardoux
Université de Provence

Etienne PARDOUX est professeur à l'Université de Provence. Ancien élève de l'Ecole Polytechnique, Docteur ès Sciences, membre de l'Institut Universitaire de France, ses travaux portent sur les processus stochastiques, notamment les processus de diffusion et leurs relations avec les équations aux dérivées partielles.
Ancien Directeur scientifique pour les mathématiques à la Mission Scientifique et Technique du Ministère de l'Education Nationale de l'Enseignement supérieur et de la Recherche.

Introduction

En 1973, les américains Black et Scholes publiaient un article dans lequel ils calculaient le "juste prix" d'une option ainsi que le portefeuille de couverture (ces notions seront expliquées ci-dessous), en utilisant un modèle probabiliste des fluctuations des cours de la bourse basé sur le mouvement brownien. Ce travail, auquel avait aussi été lié Merton, a valu à Merton et Scholes le prix Nobel d'économie en 1997 (F. Black est décédé depuis).

Le but de cet exposé est de présenter le résultat maintenant célèbre de Black et Scholes, ainsi que d'indiquer des directions de recherche actuelles. Notons que les problèmes posés par les banques motivent actuellement beaucoup de travaux de recherche en probabilités, et que les institutions financières embauchent de nombreux mathématiciens de par le monde.

La première partie du texte qui suit traite le problème dans le cadre discret. Il peut donner lieu à une activité en classe de Terminale (en particulier ES). La seconde contient l'essentiel de l'argument de Black et Scholes. La troisième esquisse des recherches actuelles.

1 - Le modèle en temps discret

On considère une situation modèle où chaque agent a le choix entre deux placements possibles :

1. *Le placement à la Caisse d'Epargne* (3,5% garanti), dont le cours évolue au cours du temps suivant la formule ($\eta > 1$) :

$$S_n^0 = S_0^0 \eta^n \ , \quad n = 1, 2, \ldots$$

2. *Une action en bourse*, dont le cours fluctue suivant la formule :

$$S_n = S_0 \times \xi_1 \times \xi_2 \times \ldots \times \xi_n \quad , n = 1, 2, \ldots$$

où les variables aléatoires (ξ_n ; $n = 1, 2, \ldots$) sont indépendantes, toutes de même loi de Bernoulli :

$$P(\xi_i = u) = p, \qquad P(\xi_i = d) = 1 - p$$

avec $d < \eta < u$ (u comme "up", d comme "down").

On s'intéresse à la notion d'option d'achat (il existe de façon symétrique des options de vente). Une **option d'achat** est un contrat conclu à l'instant 0, aux termes duquel le vendeur s'engage à vendre à l'acheteur y actions à l'instant N, à un prix fixé K (quel que soit le prix S_N de l'action sur le marché à l'instant N).

L'acheteur paie à l'instant 0 un prix x en échange de ce droit. Il fait cela parce qu'il sait qu'il devra acheter ces actions (ou tout autre produit qui fluctue sur un marché boursier, par exemple un certain montant d'une devise étrangère) à une date fixée, et il veut se garantir contre une hausse importante des cours.

Il débourse donc x Frs à l'instant 0, et encaisse à l'instant N un gain égal à :

$$f(S_N) = y(S_N - K)+,$$

puisque si le cours S_N de l'action à l'instant N est supérieur à K, l'acheteur gagne par action $S_N - K$, la différence entre ce qu'il devrait débourser s'il n'avait pas pris soin d'acheter une option, et ce qu'il va débourser pour obtenir la même chose, en "exerçant" son option. Par contre, si le cours S_N est inférieur au prix convenu K, l'acheteur jette son option au panier (l'option donne le droit d'acheter au cours convenu, mais ne comporte pas d'obligation d'achat).

Quel est le "juste prix" x de cette option ?

Le vendeur encaisse x Frs à l'instant 0, et débourse $y(S_N - K)_+$ Frs à l'instant N.

Il cherche à se "couvrir" contre le risque d'une forte hausse de l'action. Pour cela, il va placer "au mieux" les x Frs que lui verse l'acheteur pour qu'ils deviennent un montant aussi proche que possible de $y(S_N - K)_+$ à l'instant final N.

On va voir qu'il existe un prix x, et une stratégie de "couverture", tels que la valeur du portefeuille ainsi géré, à partir de l'investissement de x Frs à l'instant 0, soit *exactement* $y(S_N - K)_+$ Frs à l'instant N.

La somme x correspondante est considérée comme étant le "*juste prix*" de l'option.

Supposons qu'à l'instant n la richesse initiale x soit devenue

$$X_n = X_n - Z_n + Z_n,$$

où Z_n est la partie investie en bourse, et $X_n - Z_n$ est la somme déposée à la Caisse d'Epargne. Alors la richesse à l'instant $n+1$ sera

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= (X_n - Z_n)\eta + Z_n \xi_{n+1} \\ &= X_n \eta + Z_n(\xi_{n+1} - \eta). \end{aligned}$$

On veut que soit satisfaite le relation :

$$X_N = f(S_N)\ [= y(S_N - K)_+]$$

Cherchons X_{N-1} et Z_{N-1} tels que cette relation soit satisfaite, soit

$$X_{N-1}\eta + Z_{N-1}(\xi_N - \eta) = f(S_{N-1}\xi_N)$$

d'où les deux relations suivantes doivent être satisfaites :

$$\begin{aligned} X_{N-1}\eta + Z_{N-1}(d - \eta) &= f(S_{N-1}d) \\ X_{N-1}\eta + Z_{N-1}(u - \eta) &= f(S_{N-1}u). \end{aligned}$$

On résout ce système de deux équations à deux inconnues, et on obtient

$$X_{N-1} = \eta^{-1}(\Phi f)(S_{N-1}),$$

où

$$\begin{aligned} (\Phi f)(s) &:= \frac{u-\eta}{u-d} f(sd) + \frac{\eta - d}{u-d} f(su) \\ &= \widehat{E} f(s\xi_N) \end{aligned}$$

si

$$\widehat{P}(\xi_i = u) = q,\ \widehat{P}(\xi_i = d) = 1 - q$$

$$q = \frac{\eta - d}{u - d} \neq p.$$

et par ailleurs

$$Z_{N-1} = \frac{f(S_{N-1}u) - f(S_{N-1}d)}{u-d}$$
$$= \text{"}\textit{dérivée discrète}\text{"}.$$

En itérant ce raisonnement, on obtient

$$X_{N-k} = \eta^{-k}(\Phi^k f)(S_{N-k})$$

$$Z_{N-k} = \frac{(\Phi^{k-1} f)(S_{N-k}u) - (\Phi^{k-1} f)(S_{N-k}d)}{\eta^{k-1}(u-d)}$$

Soit encore :

$$X_k = F(k, S_k)$$

$$Z_k = \frac{F(k, S_k u) - F(k, S_k d)}{u-d}$$

où

$$F(k, s) := \eta^{-(N-k)}(\Phi^{N-k} f)(s)$$
$$= \eta^{-(N-k)} \sum_{l=0}^{N-k} C_N^l q^l (1-q)^{N-k-l} f(s u^l d^{N-k-l})$$
$$= \eta^{-(N-k)} \widehat{E} f(s \times \xi_{k+1} \times \ldots \times \xi_N)$$

Donc en particulier

$$x = \eta^{-N}(\Phi^N f)(S_0)$$
$$= \eta^{-N} \sum_{k=0}^{N} C_N^k q^k (1-q)^{N-k} f(S_0 u^k d^{N-k})$$
$$= \eta^{-N} \widehat{E} f(S_0 \times \xi_1 \times \ldots \times \xi_N)$$

Notons que le résultat est indépendant de p, qui précise la loi de probabilité des fluctuations ξ_i des cours de la bourse. Il ne dépend que du taux d'intérêt de la Caisse d'Epargne (c'est-à-dire de η), et des valeurs prises par les fluctuations ξ_i. Le calcul fait intervenir une probabilité "artificielle" $\widehat{P}$, qui n'a rien à voir avec celle qui modélise le fonctionnement du marché boursier. On notera enfin que la quantité Z_n que l'agent investit à la bourse entre les instants n et $n+1$ ne dépend que des fluctuations des cours jusqu'à l'instant k (heureusement, puisque les fluctuations futures sont inconnues !). On dit que la suite $\{Z_n\}$ est "adaptée".

2 - Le modèle en temps continu

Le modèle étudié dans l'article de Black et Scholes de 1973 s'obtient à partir du modèle de la section précédente, en remplaçant η^n par e^{rt}, et $\xi_1 \times \ldots \times \xi^n$ par $e^{\mu t + \sigma B_t}$, où $\{t \to B_t\}$ est un **mouvement brownien**, notion introduite au début du siècle par Brown (1825 - pollen), Bachelier (1900 - finance), Einstein (1905 - particules), Wiener (1923 - signaux) et étudié en profondeur par P. Lévy (1948) et de nombreux successeurs.

Aujourd'hui, non seulement le mouvement brownien sert d'outil de modélisation dans de nombreuses disciplines, mais il intervient dans beaucoup de domaines des mathématiques, notamment en probabilités, en théorie des équations aux dérivées partielles, en géométrie riemanienne et dans l'étude des fractals.

Définition

Un *mouvement brownien* est un processus $\{t \to B_t\}$ qui satisfait :

- $B_0 = 0$
- $\forall 0 < s < t$, $B_t - B_s$ est une v.a.r. gaussienne centrée, de variance $t - s$, indépendante de $\{B_r, 0 \leqslant r \leqslant s\}$.
- $t \to B_t$ est continue (mais *non dérivable* !)

Une propriété fondamentale : *la variation quadratique*

Si $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$, et $\sup_i (t_{i+1} - t_i) \to 0$,

$\Sigma_{0 \leqslant i \leqslant n} (B_{t\,i+1} - B_{ti})^2 \to t$.

Notons que les fonctions régulières (en particulier de classe C^1) ont une variation quadratique nulle. Le résultat ci-dessus exprime la très forte irrégularité du brownien, qui résulte de l'indépendance de ses accroissements.

Conséquence : formule d'Itô (1942)

Si $g \in C^{1,2}$,

$$g(t, B_t) = g(0, 0) + \int_0^t g'_s(s, B_s)\,ds + \int_0^t g'_x(s, B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''_{x^2}(s, B_s)\,ds$$

La preuve de ce résultat s'appuie sur le développement limité :

$$g(t_{i+1}, B_{ti+1}) - g(t_i, B_{ti}) = g'_t(\theta_i, B_{ti})(t_{i+1} - t_i) + g'_x(t_{i+1}, B_{ti})(B_{ti+1} - B_{ti}) + 1/2\, g''_{x^2}(t_{i+1}, \beta_i)(B_{ti+1} - B_{ti})^2,$$

sur le résultat concernant la variation quadratique, et sur la définition de l'intégrale stochastique d'Itô par rapport à dB_s.

Notons que si les trajectoires de B_s étaient régulières, sa variation quadratique serait nulle, et l'on n'aurait pas le "terme complémentaire d'Itô" comportant la dérivée seconde.

Nous pouvons maintenant étudier le modèle de l'option en temps continu. Si le cours de l'action fluctue selon la formule : $S_t = e^{\mu t + \sigma B_t}$, on a, d'après la formule d'Itô :

$$dS_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S_t \, dt + \sigma \, S_t \, dB_t,$$

et donc l'évolution du portefeuille du vendeur (à partir de l'investissement initial de x Frs) est donnée par :

$$dX_t = (X_t - Z_t)\, r dt + Z_t \left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma \, dB_t\right),$$

où X_t désigne la valeur du portefeuile à l'instant t, Z_t la part du portefeuille investi en bourse, et $X_t - Z_t$ la part déposée à la Caisse d'Epargne. Notons que l'écriture ci-dessus de l'évolution de X_t part de l'hypothèse que ce portefeuille est "auto-finançant", c'est-à-dire que son évolution suit "mécaniquement" les évolutions provoquées d'une part par les intérêts versés par la Caisse d'Epargne, et d'autre par les fluctuations des cours de la bourse (il n'y a ni consommation, ni injection d'argent dans le portefeuille, mis à part les x Frs initiaux).

On a par ailleurs la condition finale

$$X_T = f(S_T) \quad [= y(S_T - \mathrm{K})_+].$$

Postulons que, comme dans le cas discret, on a une relation de la forme

$$X_t = F(t, S_t), \ \ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Cette relation se réécrit : $\quad X_t = F(t, \exp[\mu t + \sigma B_t])$.

On tire de la formule d'Itô, en supposant F suffisamment régulière :

$$dX_t = F'_t(t, S_t)\, dt + F'_x(t, S_t)\, S_t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt$$

$$+ F'_x(t, S_t)\, S_t \sigma \, dB_t + \frac{1}{2} F''_{x^2}(t, S_t)\, S_t^2 \, \sigma^2 \, dt.$$

Rapprochant les deux formules pour dX_t, on tire deux relations, en égalant les coefficients de dB_t et de dt :

Première relation

$$Z_t = F'_x(t, S_t)\, S_t \, ;$$

Deuxième relation

$$F'_t(t, S_t) + \frac{\sigma^2}{2} F''_{x^2}(t, S_t)\, S_t^2 + r F'_x(t, S_t)\, S_t - r F(t, S_t) = 0.$$

Une façon simple de satisfaire cette relation est de chercher F solution de l'équation aux dérivées partielles parabolique du second ordre :

$$F'_t(t, S_t) + \frac{\sigma^2}{2} F''_{x^2}(t, x)\, x^2 + r F'_x(t, x)\, x - rF(t, x) = 0,$$

$$F(T\, x) = y(x - K)_+.$$

La solution est donnée par la formule de Black et Scholes (1973, Prix Nobel 1997)

$$F(t, s) = y\, E\left(s\, e^{\sigma\sqrt{T-t}\,\theta - \sigma^2/2(T-t)} - K\, e^{-r(T-t)}\right)_+$$

où θ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance 1. La quantité ci-dessus se réécrit :

$$F(t, s) = s\mathrm{N}(\mathrm{d}_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2),$$

avec

$$N(d) = y\,(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{d} e^{-x^2/2} dx,$$

$$d_1 = \frac{\log(s/K) + \left(r + \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma(T-t)^{1/2}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\,.$$

En outre, le portefeuille de couverture est donné par :

$$Z_t = \frac{\partial F}{\partial s}(t, s) = N(d_1).$$

(et cette formule est correcte, bien que d_1 dépende de s !). Notons que le résultat dépend de r (qui est connu), et de la *volatilité* σ (en général inconnue, qu'il faut estimer pour appliquer la formule… à moins de partir du prix que le marché fixe pour l'option, pour calculer la volatilité en inversant la formule de Black et Scholes - on calcule alors ce que l'on appelle la *volatilité implicite*).

Le résultat ne dépend pas de μ (comme dans le cas discret il ne dépendait pas de p).

3 - Généralisation de la formule de Black et Scholes

Rappelons la formule qui donne l'évolution du portefeuille :

$$dX_t = (X_t - Z_t)\, r\, dt + Z_t\left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dB_t\right).$$

Notons que $X_t - Z_t$ représente le montant déposé à la Caisse d'Epargne. Mais il peut être négatif, et dans ce cas, il s'agit d'un prêt, auquel s'applique un taux d'intérêt $R > r$, d'où :

$$dX_t = g(X_t, Z_t)\,dt + Z_t\left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\, dB_t\right),$$

avec

$$g(x, z) = r(x - z)_+ - R(x - z)_-.$$

Ou encore, après un petit changement de notation :

$$dX_t = g(X_t, Z_t)\,dt + Z_t\, dB_t$$
$$X_T = f(S_T).$$

Une autre façon de formuler ce qu'on appelle une "équation différentielle stochastique rétrograde" consiste à chercher $x \in \mathbb{R}$ et un processus $\{Z_t\,,\, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ adapté (au sens où on a employé ce terme à la fin de la section 1) tels que

$$E\int_0^T |Z_t|^2\,dt < \infty$$

et la solution $\{X_t\}$ de l'"équation différentielle stochastique"

$$dX_t = g(X_t, Z_t)\,dt + Z_t dB_t$$
$$X_0 = x$$

vérifie $X_T\, f(S_T)$.

On sait depuis 1990 que si g est lipschistzien, le problème ci-dessus admet une solution unique.

Dans ce cas non-linéaire, il n'y a plus de formule explicite pour le prix x de l'option, et pour le portefeuille Z_t. On peut calculer ces quantités en résolvant numériquement une EDP non linéaire.

En effet, de même que ci-dessus la valeur X_t du portefeuille s'écrivait sous la forme $F(t, S_t)$, avec F solution d'une équation aux dérivées partielles linéaire, on peut montrer que la solution du problème non linéaire ci-dessus s'écrit en terme de la solution d'une EDP non linéaire.

Supposons pour simplifier que $S_t = B_t$.

Alors la solution X_t de l'équation ci-dessus s'écrit $X_t = F(t, B_t)$, où F est la solution de l'EDP parabolique non linéaire :

$$F'_t(t, x) + \frac{1}{2}F''_{x^2}(t, x) + g\left(F(t, x), F'_t(t, x)\right) = 0$$
$$F(T, x) = f(x).$$

On peut aussi considérer des EDP elliptiques avec une variable x parcourant un domaine D de $\mathbb{R}^d$, et avec une non-linéarité non nécessairement lipschitzienne, comme par exemple :

$$\frac{1}{2}\Delta F(x) = F^2(x),\ x \in D$$
$$F(x) = f(x),\ x \in \partial D,$$

avec la fonction f donnée.

Le lien entre cette équation aux dérivées partielles et l'équation stochastique ci-dessus fournit une formule probabiliste pour l'équation aux dérivées partielles, et donc un outil d'étude de cette dernière. D'autres formules probabilistes pour la même équation, utilisant des notions plus compliquées, ont été proposées récemment, et ont permis de progresser dans l'étude de cette classe d'équations.

Remarque 1. *On voit ici une situation tout à fait habituelle dans la recherche mathématique. Des progrès sur un sujet donné - ici les "équations différentielles stochastiques rétrogrades" - ont des applications en finance mathématique, et aussi à d'autres domaines des mathématiques. Or aucune de ces applications n'était envisagée au tout début de cette théorie. En d'autres termes, des constructions apparemment gratuites apportent des réponses à des questions que l'on ne se posait pas au moment où ces constructions sont apparues.*

Remarque 2. *Un autre fait tout à fait typique est le suivant : avec un modèle très simplifié, on a une solution explicite au problème posé, alors qu'avec un modèle un peu plus complexe, il faut recourir à une approximation numérique pour avoir une solution concrète au problème posé. Ici, la formule explicite, solution du modèle linéaire, est effectivement utilisée sur les marchés. Dans le cas où le modèle linéaire est trop simpliste pour que la solution explicite soit utile en pratique, celle-ci sert tout de même à vérifier la qualité des méthodes numériques utilisées, ce qui n'est pas d'un mince intérêt !*

Bibliographie

Le travail de pionnier de Louis Bachelier est contenu dans sa thèse de doctorat :

L. Bachelier : Théorie de la spéculation, *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* **17**, 1900, réédition J. Gabay, 1995.

La référence de l'article original de Black et Scholes est :

F. Black, M. Scholes : The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* **83**, 1973.

Le modèle en temps discret, bien que plus simple, a été étudié après le modèle en temps continu. On trouvera un exposé complet des différents modèles, ainsi que des mathématiques nécessaires pour bien les comprendre, dans les ouvrages suivants :

D. Duffie : *Modèles dynamiques d'évaluation*, Presses Universitaires de France, 1994.

D. Lamberton, B. Lapeyre : *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, SMAI, Mathématiques et applications **9**, Ellipse, 1991.

L'article original sur les équations différentielles stochastiques est :

E. Pardoux, S. Peng : Adapted solution of a backward stochastic differential equation, *System & Cotrol Letters* **14**, 1990

Les applications des équations différentielles stochastiques rétrogrades en finances mathématiques sont présentées en détail dans :

N. El Karoui, S. Peng, M.C. Quenez : Bacward stochastic differential equations in Finance, *Mathematical Finance* **7** T1, 1997.