Avis de recherche

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.
Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet et votre nom sur chacune et, si possible, une disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour immédiat) à :

Robert FERRÉOL
6, rue des annelets
75019 PARIS
Internet : rferreol@club-internet.fr

Nouveaux avis de recherche

Avis de recherche n° 87 de Georges GLAESER (Strasbourg)

A qui est dû le théorème de l'excès sphérique (l'aire d'un triangle sphérique d'angles A, B et C d'une sphère de rayon R est égale à $(A + B + C - \pi)R^2$) ?

Avis de recherche n°88 de Georges GLAESER (Strasbourg)

Je lis dans l'histoire générale des sciences volume 1, page 345 que "Héron d'Alexandrie évalua la distance Rome-Alexandrie au moyen de deux observations d'une même éclipse de lune (sans doute 62 ans après J.C.). J'aimerais connaître quelques détails sur cet exploit (méthode, matériel, précision du résultat)...

Avis de recherche n° 89 de Daniel REISZ

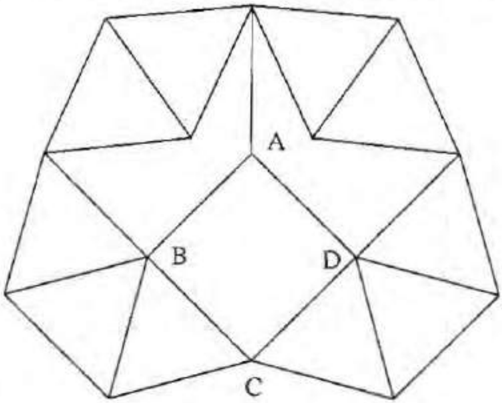
Qui peut dire d'où provient le joli résultat :

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx = \frac{22}{7} - \pi$$

facile à obtenir avec les méthodes d'intégration habituelles ?

Avis de recherche n° 90 d'Henri CAMOUS (La Garde-Freinet)

En reliant bout à bout et souplement, 4 baguettes identiques, on matérialise un carré *ABCD*, déformable en losanges.
D'après Martin Gardner, la construction suivante, formée de 23 baguettes identiques aux précédentes et articulées permet de bloquer le carré dans son plan, et est minimale. Henri Camous a réussi à démontrer le blocage, mais pas la minimalité, qu'il pose en avis de recherche.



Avis de recherche n° 91 de Jean Moreau De Saint Martin (Paris)

Existe-t-il des nombres entiers qui figurent dans le triangle de Pascal un nombre IMPAIR de fois plus grand que 3 ?

Avis de recherche n° 92 de Jean-Yves LE CADRE (Vannes)

Un petit problème soumis par mon ami Didier Guyomarc'b, professeur de lettres classiques au lycée Jean Mouliu de Chateaulin, amateur raffiné de mathématiques, sans doute aussi de billard, me laisse quelque peu désemparé :
« Peut-on construire, à la règle et au compas, comme il se doit, la trajectoire en une bande d'une boule de billard sur un billard circulaire ? »

Plus précisément, il s'agit de tracer le trajet AMB reliant deux points A et B d'un disque, tel que M soit sur le cercle le délimitant, trajet obéissant aux lois de la réflexion. La réflexion m'ayant quelque peu fait défaut, je soumets donc cet important problème à mes congénères.

Avis de recherche n° 93 de Jacques LEGRAND (Biarritz)

Dans le plan, l'ensemble des points dont les projections orthogonales sur les côtés d'un triangle sont trois points alignés est le cercle circonscrit à ce triangle (théorème de Simson). Par analogie, on pourrait penser que dans l'espace, l'ensemble des points dont les projections sur les faces d'un tétraèdre sont quatre points dans le même plan est la sphère circonscrite au tétraèdre : il n'en est rien. Cet ensemble est une surface qui contient les six arêtes du tétraèdre. A-t-elle été étudiée, et lui a-t-on donné un nom ?

Avis de recherche n° 94 de Jacques LEGRAND (Biarritz)

Soit dans le plan (P) deux coniques (Γ_1) et (Γ_2) : peut-on trouver un plan (Q) distinct de (P) et un point S n'appartenant ni à (P) ni à (Q) tels que le plan (Q) coupe les surfaces coniques (Σ_1) et (Σ_2) ayant pour sommet S et directrices respectivement (Γ_1) et (Γ_2), suivant deux cercles (ω_1) et (ω_2) ?

Réponses aux avis précédents

Avis de recherche n° 68

Demandant des ouvrages publiant la formule :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 4 \sin (60° + x) \sin (60° - x)$$

et consorts.

Jacques Borowiczyk (Tours) signale que cette relation est utilisée dans toutes les démonstrations trigonométriques du théorème de Morley et donne les références :

R. CAMPBELL, *La Trigonométrie*, Que sais-je ? n°629, p. 39 ;

A. AVEZ, *La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation*, Masson, 1992, p. 144 ;

A. VIRICEL, *Le théorème de Morley*, ADCS, diffusé par l'A.P.M.E.P.

Merci aussi à Jacques Borowiczyk pour son envoi d'une démonstration demandée dans l'avis de recherche n° 77, déjà corrigé dans le *Bulletin* n°413.

Avis de recherche n°71

J'observe que $\frac{x^n+1}{x+1}=\frac{y^m-1}{y-1}$ **admet la solution :** $\begin{cases} x=6, n=5 \\ y=10, m=4 \end{cases}$

Existe-t-il d'autres solutions en entiers non triviales ?

Jean-Yves Le Cadre (Vannes) a trouvé deux familles infinies de solutions non triviales qui ne contiennent pas la solution donnée par l'auteur :

1) x quelconque, $n = 3$, $y = x - 1$, $m = 3$.

2) x quelconque, $n = 2k + 1$, $y = \frac{x\left(x^{2k}-1\right)}{x+1}$, $m = 2$.

Avis de recherche n°82

Partant d'un entier naturel écrit en base 10 ou autre, on calcule la valeur absolue de sa différence avec le nombre ayant les mêmes chiffres en sens inverse, puis à ce nombre, on ajoute le nombre inversé, et ainsi de suite, en alternant différence et somme.

On remarque que l'on aboutit soit à 0, soit à un cycle d'ordre 2. Peut-on le démontrer ? Comment caractériser les nombres n'aboutissant pas à 0 ?

Pierre Barnouin a trouvé un cycle d'ordre 4!!

$1089990 - 999801 = 90189$; $90189 + 98109 = 188298$;

$188298 - 892881 = - 704583$; $704583 + 385407 = 1089990$!

Avis de recherche n°85

Etant donnée une fonction f, existe-t-il une fonction g telle que $f = g \circ g$?

L.G. Vidiani a envoyé les références suivantes :

- Concours Général 1983, où l'on fait démontrer le théorème suivant : *Une permutation d'un ensemble fini est un carré si et seulement si le nombre de ses orbites de cardinal pair est pair.*
- Agrégation 1949, corrigée dans le "Que sais-je" d'André Delachet : *Calcul différentiel et intégral*, où le problème est étudié pour une fonction numérique strictement croissante de classe C^2.
- Exercice classique de Taupe : Montrer que si a > 0 et ≠ 1, il existe exactement deux fonctions f de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que $f(f(x)) = ax + b$, et elles sont affines

Pierre Samuel (Bourg-la-Reine) donne un exemple de fonction f de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ qui n'est pas un carré :

Il suffit qu'il existe 3 éléments a, b, c de $\mathbb{E}$ tels que :

1) $f(a) = f(b) = a$, $f(c) = b$;

2) a est le seul élement de $\mathbb{E}$ laissé fixe par f ;

3) Pour tout x de $\mathbb{E}$, distinct de a et b, on a $f(x) \neq a$.

Avis de recherche n° 86

Existe-t-il des polyèdres convexes ayant sept arêtes ?

Réponse de Pierre Samuel (Bourg-la-Reine)

Non, si l'on exclut les polyèdres aplatis (ici les heptagones). En effet, en notant S le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes, on a dans tout polyèdre convexe non aplati : $3S \leqslant 2A$, puisque de chaque sommet partent au moins trois arêtes et que chaque arête relie deux sommets. De plus, le nombre d'arêtes est au plus $\frac{S(S-1)}{2}$, de sorte que $3S \leqslant 2A \leqslant S(S-1)$. Si $A = 7$, on en déduit : $4 \leqslant S \leqslant 14/3$, soit $S = 4$. Si on reporte dans l'inégalité, on obtient $A = 6$: absurde.

Remarquons que l'on n'utilise pas la relation d'Euler.

Autres réponses : Gérard Grancher (Rouen), ***Jean Moreau de Saint Martin*** (Paris), ***Marc Royer*** (Montélimar).

Remarque 1 : nous avons montré en fait qu'un graphe simple (i.e. non orienté, sans boucle et sans arêtes en parallèle), planaire ou non, dont tous les sommets sont de degré $\geqslant 3$, ne peut avoir 7 arêtes.

Remarque 2 (de Marc Royer) : Un théorème de Steiniz affirme que les conditions nécessaires, facilement vérifiables pour qu'il existe un polyèdre convexe ayant A arêtes, S sommets et F faces :

relation d'Euler : $F + S = A + 2$, $S \geqslant 4$, $2A \geqslant \max(3F, 3S)$

sont également suffisantes. Quelqu'un a-t-il une démonstration ?

Remarque 3 (de Gérard Grancher) : pour $n \geqslant 8$, il existe toujours un polyèdre convexe non aplati ayant n arêtes :

- pour n pair, la pyramide de base un polygone à n/2 côtés convient ;
- pour n impair $\geqslant 9$, considérer le polyèdre dont une face est un triangle et la "face opposée" un polygone convexe à $(n-3)/2$ côtés dont chacun des sommets est joint à un sommet du triangle (de telle façon bien sûr à s'assurer de la convexité du polyèdre obtenu).

Remarque 4 (de Georges Vidiani) : il existe un heptaèdre non convexe présenté dans David Wells : *le dictionnaire Penguin des curiosités géométriques*, Eyrolles, 1995.