Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, cherche de « beaux problèmes »... si possible, trouver des solutions et les invite à donner libre cours à leur invention créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions. Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés.

Enoncés, réponses et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur des feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
21, rue Juliette Dodu
75010 PARIS

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ 273 (Gilbert REBEL, 65 - Tarbes)

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence : $u_{n+2} = u_n - |u_{n+1}|$. Montrer que si la suite (u_n) converge, la série de terme général u_n est, elle aussi, convergente.

b) Que peut-on dire de la suite $(v_n)_{n\in N}$ définie par ses deux premiers termes v_0 et v_1 et la relation de récurrence $v_{n+2} = |v_{n+1}| - v_n$?

ÉNONCÉ 274 (Mireille BOURNAUD, 94 - Vitry sur Seine)

Dans le plan euclidien, on considère un ensemble de points, noté $\mathbb{E}$, tel que la distance entre deux points quelconques de l'ensemble $\mathbb{E}$ soit un nombre entier.

Montrer que, si les points de l'ensemble $\mathbb{E}$ ne sont pas tous alignés, alors le nombre de points de $\mathbb{E}$ est fini.

ÉNONCÉ 275(Pierre DANIEL, 07 - Beauchastel)

Un segment [AB] étant donné, H est un point quelconque du cercle de diamètre [AB]. Le cercle de centre H, de rayon HA, coupe en I et J la parallèle à (AB) passant par H, et le trapèze ABIJ est convexe.

Déterminer le lieu des points P et Q, respectivement intersection des diagonales de ABIJ et intersection des côtés (AJ) et (BI).

ERRATUM ÉNONCÉ 270

Un contresens s'est glissé inopinémant dans l'énoncé 270 (*Bulletin* 413, p. 787). L' texte original était le suivant :

La altura de un tronco de piramide regular y la apotema de la base mayor son ambas iguales a *a*.

1° Calcular la apotema de la base menor con la condicion de ser las caras laterales circonscriptibles a circunferencias.

2°¿Cuantos poligonos regulares pueden ser base de los troncos de piramide regular que existan en las condiciones anteriores?

Ce n'était donc pas le *côté* de la plus grande base, mais le *rayon du cercle inscrit* dans la plus grande base qui devait être égal à la hauteur. Toutes mes excuses à l'auteur et aux lecteurs, et merci à ceux qui m'ont signalé l'erreur - sans cette correction, le problème n'a pas de sens!

Dans la première question, l'auteur demande donc de calculer le rayon du cercle inscrit dans la petite base. Par contre, il s'agit bien de la hauteur du tronc de pyramide.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ 252 (Igor CHARIGUINE, Moscou)

On se donne un angle de sommet O. Sur l'un des côtés, on choisit deux points A et A', et sur l'autre, deux points B et B'. Les droites (AB) et (A'B') se coupent en un point M. Sur le cercle circonscrit au triangle OAB, on construit la corde [OD] parallèle à (A'B'), et sur le cercle circonscrit au triangle OA'B', la corde [OD'] parallèle à (AB).

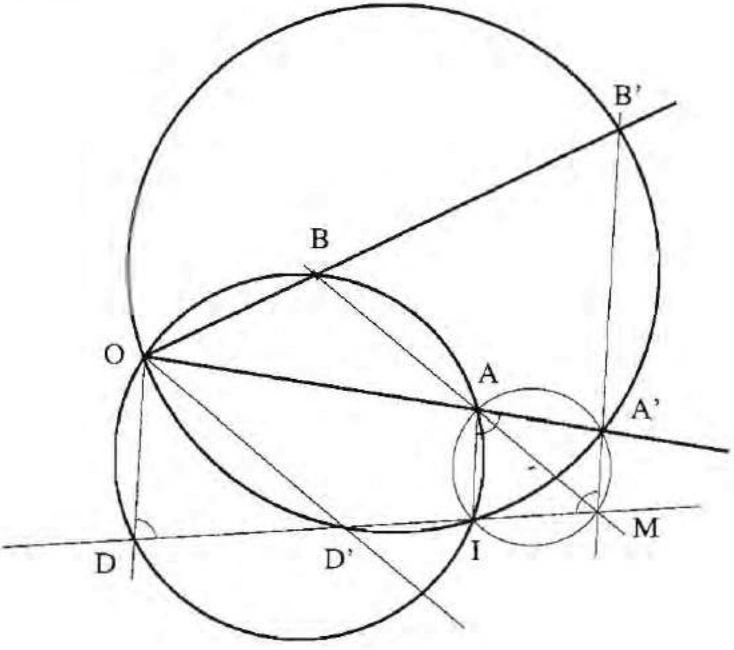
Montrer que la droite (DD') passe par le point M.

RÉPONSE de Jacques BOUTELOUP (76-Rouen)

Il est intéressant de montrer une propriété plus riche d'alignement de quatre points. Nous désignons par I le deuxième point d'intersection des cercles (OAB) et (OA'B'). Les points A, M, I, A' d'une part et B, M, I, B' d'autre part, sont cocycliques. C'est une propriété classique qui peut se justifier de façons variées :

- Par une construction classique, I est le centre de la similitude $A \mapsto B$, $A' \mapsto B'$. C'est donc le centre de la similitude $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, d'où le résultat par la même construction classique.
- Par la directe du théorème de Simson, les projections orthogonales de I sur les côtés de l'angle sont alignées avec celles sur AB et A'B'. D'où la propriété par réciproque du même théorème.
- Par relation classique de points cocycliques : (AM, AI) = (AB, AI) = (OB, OI) = (OB', OI) = (A'B' , A'I) = (A'M , A'I) et la propriété, avec démonstration analogue pour le deuxième cercle.

Le résultat du texte s'établit d'ailleurs en utilisant un seul de ces cercles. (DO,DI) = (AO,AI) = (AA',AI) = (MA',MI) = (A'B',MI). Le parallélisme de (DO) et (AB) entraîne celui de (DI) et (MI), d'où l'alignement de D, I, M. On montre de même l'alignement de D', I, M en remplaçant D, A, A' par D', A', A dans le raisonnement précédent.



AUTRES SOLUTIONS

G. BOUEZ (75-Paris), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Jacques DAUTREVAUX (06 - St André), Edgard DELPLANCHE (91 - Créteil), Christian DUFIS (87 - Limoges), IREM d'Aquitaine (33 - Talence), René MANZONI (76 - Le Havre), A. MOLARD (67 - Strasbourg), Charles NOTARI (31 - Montaut), Joël PAYEN (93 - Blanc Mesnil), Maurice PERROT (75 - Paris), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), Anne-Marie RAUCH (67 - Strasbourg), Raymond RAYNAUD (04 - Digne), Pierre RENFER (67 - Ostwald), Jean-Marie ROBBE (25 - Villers le lac), René STORCH (71 - Mâcon) et André VIRICEL (54 - Villers lès Nancy).

REMARQUES

« Cependant qu'à Moscou une habile cuisine
Porte au trône des Tsars un Boris Ethylsine,
Œuvre dans sa datcha un Chariguine Igor
qui unit dans son cœur Lobat et Pythagor »

André Viricel (Août 1996)

Plus prosaïquement, doit-on, dans un tel problème, redémontrer que les cercles circonscrits aux quatre triangles formés par quatre droites prises trois à trois on un point commun (point de MIQUEL du quadrilatère complet) ou peut-on supposer ce résultat connu ?

Même s'il est classique, ce résultat contient l'essentiel de la solution de cet énoncé 252, les trois quarts des lecteurs l'ont utilisé et 80% d'entre eux l'ont redémontré, pour plus de la moitié en utilisant la similitude de centre I ; trois lecteurs (outre Jacques BOUTELOUP) ont utilisé les relations angulaires et un seul la droite de Simson.

Deux lecteurs ont proposé une solution analytique ; par ailleurs, Christian DUFIS propose deux solutions dont une ne fait pas intervenir le point de MIQUEL : le parallélisme (D'B')//(DB) et (OD')//(BM) prouve que l'homothétie de centre D' qui transforme la droite (A'B') en la droite (OD) transforme M en D. Jean-Marie ROBBE prouve d'abord, à l'aide de nombreuses relations angulaires élémentaires, que (D'B)//(DB'), puis que D, I et D' sont alignés, enfin que $\widehat{DMB} = \widehat{D'DO}$.

Maurice PERROT fait intervenir les intersections E et F de (DA') et (DB') avec (AB), prouvant que les triangles DAB et D'EF se correspondent dans une homothétie de centre M, vu que MA'.MB' = MA.MF = MB.ME et que ces triangles ont les mêmes angles. Charles NOTARI propose plusieurs méthodes : par exemple, pour prouver l'alignement de I, D, D', il fait intervenir l'inversion de centre O et de puissance OI^2, qui transforme D et D' en deux points d'où l'on voit le segment [OI] sous le même angle.

A. MOLARD se demande si une solution en géométrie projective ne serait pas plus élégante. Pour le moins, G. BOUEZ, Jacques DAUTREVAUX et Joël PAYEN signalent le cas où les deux cercles seraient tangents en O : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ se correspondraient dans l'homothétie de centre O transformant un cercle en l'autre, donc M serait à l'infini, ce qui, pour G. BOUEZ, n'est pas compatible avec l'énoncé alors que, pour les autres, le résultat général reste valable, du point de vue projectif. Joël PAYEN étudie également le cas I = M où la méthode générale n'est plus utilisable alors que le résultat reste valable. Ce cas se présente lorsque deux des quatre droites se coupent sur l'une des deux autres.

Peu de lecteurs se sont attardés sur les cas particuliers ; par exemple celui où D et D' sont confondus et où l'énoncé perd son sens est signalé par Maurice PERROT et traité en détails par Marie-Laure CHAILLOUT, qui prouve que cela se produit lorsque A, B, A', B' sont cocycliques, donc lorsque O, M, I sont alignés.

L'énoncé plaçait A et A' d'une part, B et B' d'autre part sur une même demi-droite issue de O. G. BOUEZ mentionne que cela n'a rien de pertinent, d'ailleurs 15% des lecteurs ont placé O entre A et A', et 15% n'ont pas fait de figure.

On pouvait énoncer ce problème différemment. André VIRICEL le ramène au lemme suivant : deux cercles se coupent en A et I, une sécante commune menée par A les recoupe respectivement en D et M, alors les droites (OD) et (A'M) sont parallèles. G. BOUEZ remarque que les six points O, A, A', B, B', M sont permutables : étant donné un quadrilatère complet et les quatre cercles circonscrits chacun à un triangle, par les trois sommets du triangle on mène une corde parallèle à la quatrième droite. Les six droites joignant le point de MIQUEL aux six sommets du quadrilatère complet passent chacune par deux des sommets des 12 cordes remarquables ainsi construites.

Il mentionne également, comme généralisation du point de MIQUEL, le théorème de CLIFFORD :

pour $n \geqslant 2$,

- à un système S_{2n-1} de $(2n - 1)$ droites est associé un cercle C_{2n-1} (C_3 est le cercle circonscrit au triangle),
- à un système S_{2n} est associé un point P_{2n}, commun aux 2n cercles C_{2n-1} (P_n est le point commun de Miquel du quadrilatère complet),
- à un système S_{2n+1} est associé un cercle C_{2n+1} contenant les $(2n + 1)$ points P_{2n}.

ÉNONCÉ 253 (Maurice CRESTEY, Vincennes)

Pour chaque valeur de l'entier naturel n, on pose $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$ où $E(t)$ désigne la partie entière du réel t.

Etablir la convergence de la suite de terme général :

$$V_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u_k \quad (N \in \mathbb{N}^*).$$

SOLUTION de Renaud PALISSE (Paris)

Posons $W_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u_k$ et dans tout ce qui suit : $K = E(\sqrt{N})$.

On a : $W_N \leqslant \sum_{n=1}^{K^2+2K} u_n = \sum_{k=1}^{K} b_k$ avec $b_k = \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} (\sqrt{n} - k)$

Or, $\sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \sqrt{n} \leqslant \int_{k^2}^{(k+1)^2} \sqrt{x}\, dx = 2k^2 + 2k + 2/3$, donc $b_k \leqslant k + 2/3$.

Par conséquent, $W_N \leqslant \frac{K(K+1)}{2} + \frac{2K}{3}$.

D'autre part $W_N \geqslant \sum_{n=1}^{K^2} u_n = \sum_{k=1}^{K-1} a_k$, avec $a_k = \sum_{n=k^2+1}^{(k+1)^2} u_n$

Or, $\sum_{n=k^2+1}^{(k+1)^2} \sqrt{n} \geqslant \int_{k^2}^{(k+1)^2} \sqrt{x}\, dx$, d'où $a_k \geqslant k - 1/3$.

Par conséquent, $W_N \geqslant \frac{K(K-1)}{2} - \frac{K}{3}$

Finalement, comme $N \sim K^2$, on a $V_N \to 1/2$.

AUTRES SOLUTIONS

Jacques AMON (87 - Limoges), Alain BAILLE (38 - Grenoble), Jacques BOUTELOUP (76 - Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Roger CUCULIERE (94 - Marnes la vallée), Jean-Joël DELORME (69 - Lyon), Francis DREY (67 - Haguenau), Martine GINESTET (75 - Paris), Jean-Louis LACAZE-ESCOUS (75 - Paris), Marie-Christine LOMBARD (83 - Toulon), René MANZONI (76 - Le Havre), Omarjee MOUBINOOL (75 - Paris), Charles NOTARI (31 - Montaut), Joël PAYEN (93 - Blanc

Mesnil), Denis PEPIN (51 - Verdun), Maurice PERROT (75 - Paris), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), Anne-Marie RAUCH (67 - Strasbourg), Xavier RELIQUET (78 - Chambourcy), Pierre RENFER (67 - Ostwald), Jean RUFFIN (23 - St Pardon le neuf).

REMARQUES

« Quelques mots tout d'abord sur l'origine de cet énoncé, écrit Maurice CRESTEY.

On peut démontrer que l'ensemble des u_n est dense dans $[0\ ,\ 1]$. Ce résultat figurait dans un livre d'exercices pour la classe de math.sup, aujourd'hui épuisé que j'avais rédigé en 1969 (Editeur DUNOD).

Par ailleurs, la valeur de la limite éventuelle de la suite des moyennes arithmétiques donne une idée de la répartition des u_n dans l'intervalle $[0\ ,\ 1]$.

Dans un domaine voisin, citons un théorème de Sierpenski :

Pour tout réel x, la suite de terme général $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[kx - E(kx)]$ converge et sa limite λ_x vérifie l'inégalité $\lambda_x \leqslant 1/2$, l'égalité n'étant vérifiée que pour x irrationnel.

D'où l'idée de l'énoncé précédent... »

Comme l'ont remarqué bon nombre de lecteurs, nous avons là un exemple typique de suite non convergente qui converge en moyenne de Césaro.

Mais deux questions se posent : peut-on en dire plus sur cette suite et peut-on généraliser le résultat à d'autres suites ?

Roger CUCULIÈRE demande : " Est-il vrai que $V_N - \frac{1}{2} \sim \frac{-1}{3\sqrt{N}}$ quand $N \to +\infty$? " Certes non! C'est vrai si N est un carré parfait, mais si $N = p^2 + p$, $V_N - \frac{1}{2} \sim \frac{-7}{12\sqrt{N}}$.

Par contre, Xavier RELIQUET prouve, par récurrence sur $k = E\left(\sqrt{N}\right)$, que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $V_N \leqslant 1/2$.

En effet, si l'on pose $N = k^2 + p$,

$$V_N \leqslant \frac{k^2-1}{k^2+p} V_{k^2-1} + \frac{1}{2k\left(k^2+p\right)} \sum_{i=0}^{p} i$$

Avec cette même notation, signalons que la comparaison entre série et intégrale n'est pas la seule méthode utilisée pour encadrer V_N. Bon nombre de lecteurs ont fait appel au développement limité de $\sqrt{1+x}$, mais certains écrivent : $\frac{p}{2k+1} \leqslant \frac{p}{\sqrt{N}+k} = \sqrt{N} - k \leqslant p/2k$, ce qui donne un encadrement plus simple et un peu meilleur :

$$K \leqslant \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \sqrt{n} - E(\sqrt{n}) \leqslant k + 1/2.$$

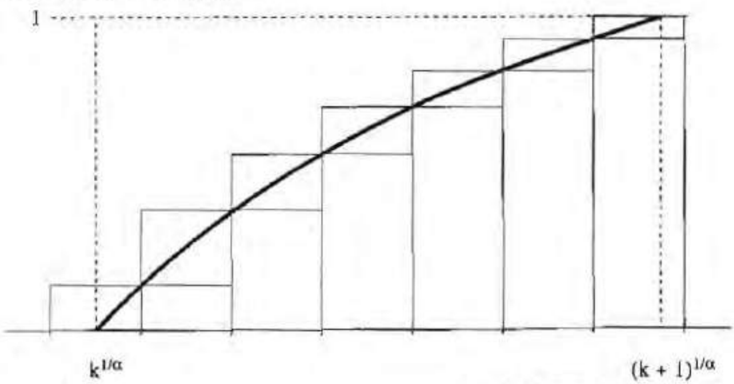
OMARJEE Moubinool remarque que la suite $\sqrt{n} - E(\sqrt{n})$ est équirépartie dans $[0\ ,\ 1]$, c'est-à-dire que si $I \subset [0\ ,\ 1]$ est un intervalle de longueur λ, le nombre de $n \leqslant N$ tels que $u_n \in I$ est équivalent à λN lorsque N tend vers l'infini. Il cite à ce sujet : RAMIS-DESCHAMPS : *Exercices analyse, Tome 2*, RAUZY Gérard, *Propriétés statistiques des suites* (PUF) et POLYA Szegö.

Autre question abordée par plusieurs lecteurs : peut-on généraliser et calculer la limite de $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k^{\alpha} - E(k^{\alpha})$? Certes : pour $0 < \alpha < 1$, cette limite vaut encore 1/2, mais le cas $\alpha > 1$ semble plus difficile.

On peut, dans le cas où $\alpha < 1$, généraliser la comparaison entre série et intégrale :

$$\int_{k^{1/\alpha}}^{(k+1)^{1/\alpha}} \left(t^{\alpha} - k\right) dt - 1 \leq \sum_{E(n^{\alpha})=k}^{N} n^{\alpha} - E(n^{\alpha}) \leq \int_{k^{1/\alpha}}^{(k+1)^{1/\alpha}} \left(t^{\alpha} - k\right) dt + 1$$

Comme le montre la figure.



En additionnant, on a, si $E(N^{\alpha}) = k$,

$$F(k) - k \leqslant \sum_{n=1}^{N} n^{\alpha} - E\left(n^{\alpha}\right) \leqslant F(k+1) + (k+1),$$

avec $$F(k) = \int_0^{k^{1/\alpha}} t^{\alpha}\,dt \sum_{n=1}^{k} n^{1/\alpha} - k\left(k^{1/\alpha}\right)$$

Or, $$\sum_{n=1}^{k} n^{1/\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha+1} k^{1+1/\alpha} + \frac{1}{2} k^{1/\alpha} + O\left(k^{1/\alpha - 1}\right)$$

d'où le résultat, grâce au deuxième terme $1/2\ k^{1/\alpha}$ qui devient la partie principale de $F(k)$. Cette dernière égalité n'est que le tout début de la formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin utilisée, par exemple, pour la formule de Stirling ou dans l'énoncé 254 ci-après, mais dans notre cas particulier, il suffit de remarquer que :

$$\left(\frac{k^{n+1}}{u+1} + \frac{1}{2} k^{u}\right) - \left(\frac{(k-1)^{u+1}}{u+1} + \frac{1}{2}(k-1)^{u}\right) = k^{u} + O\left(k^{u-2}\right)$$

u étant un exposant quelconque, en l'occurrence $u = 1/\alpha$.

Signalons pour conclure l'intéressante relation utilisée par Marie-Laure CHAILLOUT dans le cas où $\alpha = p/q$ $(p < q)$

$$\sum_{k=1}^{n^p} E\left(k^{q/p}\right) + \sum_{k=1}^{n^q} E\left(k^{p/q}\right) = n^{p+q} + n$$

L'idée est d'étudier le nombre de solutions de : $E(k^{p/q}) = i$ pour $1 \leqslant i < n^p$.
Si l'on rapproche de notre formule sommatoire :

$$\sum_{k=1}^{n^p} k^{q/p} + \sum_{k=1}^{n^q} k^{p/q} = n^{p+q} + \frac{1}{2} n^p + \frac{1}{2} n^q + O\left(n^{q-p}\right)$$

on voit pourquoi il est plus facile de conclure lorsque l'exposant α est inférieur à 1 que lorsqu'il est supérieur...

ENONCÉ N°254

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que le plus grand entier m tel que : $\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \leqslant 1$ est la parrtie entière de : $\left(e\sqrt{n^2 - n + \frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{2}$.

Déterminer tous les triplets (n, m, q) d'entiers supérieurs ou égaux à 2 (avec $n \leqslant m$) vérifiant : $\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{q}$.

SOLUTION

Pour savoir s'il n'était pas trop classique, j'ai soumis cet énoncé, en septembre 1995, à Pierre Samuel (62 - Bourg-la-Reine) qui, au vu de ma solution, m'a écrit : « *la solution n'est pas facile du tout ! Je ne pense pas que beaucoup de lecteurs du Bulletin s'en tireront...* » De fait, seul René Manzoni (76 - Le Havre) s'y est attaqué, mais sans aborder le cœur du problème : les propriétés arithmétiques de e.

Cet énoncé fait donc suite au n° 224 (*Bulletin* 397, février 1995, p. 452) où il était explicitement question des propriétés arithmétiques de e. Malheureusement, en reprenant ma démonstration de 1995, j'y ai découvert une fatale erreur remettant en cause la démonstration et le résultat de la première question : en fait, il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles le plus petit m cherché n'est pas une partie entière de $\left(e\sqrt{n^2 - n + \frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{2}$, même si la plus petite d'entre elles est supérieure à 4×10^{47}.

Mais, comme l'enfant qui laisse tomber une pile d'assiettes et s'exclame : « j'ai de la chance, je n'en ai cassé que deux », je me console en remarquant que la seconde question est néanmoins récupérable : eh oui!, il n'existe pas d'autre triplet solution (n, m, q) que (2, 2, 2), 2, 3, 6) et (3, 6, 20) ; et qu'en définitive, il suffit de remplacer $\left(e\sqrt{n^2 - n + \frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{2}$ par $\left(e\sqrt{n^2 - n + \frac{1}{3} - \frac{e^{-2}}{12}}\right) - \frac{1}{2}$ pour déboguer le problème. L'espace est mince entre ces deux réels, mais suffisant toutefois pour y caser un entier, contrairement à ce que je pensais initialement !

L'idée de départ, c'est qu'on connaît le comportement asymptotique de

$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \text{Log}\, n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12\, n^2} + \frac{1}{120\, n^4} \cdots$ γ étant bien évidemment la constante d'Euler : 0,577 215 66…

$$\text{Or, } exp\left(2\left(\frac{1}{2\,n} - \frac{1}{12\,n^2} + \frac{1}{120\,n^4} \ldots\right)\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{90\,n^4} \ldots$$

On s'attend donc à l'encadrement suivant de $S(n)$:

$$\gamma + \text{Log}\sqrt{n^2 + n + \frac{1}{3} - \frac{1}{90\,n^2}} < S(n) < \gamma + \text{Log}\sqrt{n^2 + n + \frac{1}{3}}$$

qui, par ailleurs, fournit de très bonnes approximations de γ. Ces inégalités peuvent se démontrer proprement : à droite, par l'étude de la fonction $\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\text{Log}\frac{x^2 + x + 1/3}{x^2 - x + 1/3}$ qui tend vers zéro à l'infini et est décroissante, donc positive, de sorte que la suite $S(n) - \text{Log}\sqrt{n^2 + n + \frac{1}{3}}$ est croissante, donc inférieure à sa limite, laquelle vaut γ par définition. A gauche, l'étude de la fonction $\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\text{Log}\frac{x^2 + x + 1/3 - 1/90\,x^2}{x^2 - x + 1/3 - 1/90\,(x-1)^2}$ est plus laborieuse mais similaire (j'ai fait le calcul…).

A partir de là, si

$$m > e\sqrt{n^2 - n + \frac{1}{3} - \frac{e^{-2}}{12} + \frac{1}{90\,n^2}} - \frac{1}{2} > n$$

$$S(m) > \gamma + \text{Log}\sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{90\,m^2}}$$

$$> 1 + \gamma + \text{Log}\sqrt{n^2 - n + \frac{1}{3}} > S(n-1) + 1$$

de sorte que le plus grand entier m tel que $S(m) - S(n-1) \leqslant 1$ est inférieur ou égal à : $e\sqrt{n^2 - n + \frac{1}{3} - \frac{e^{-12}}{12} + \frac{1}{90\,n^2}} - \frac{1}{2}$, donc à sa partie entière.

Pour la même raison, si $m \leqslant e\sqrt{n^2 - n + \frac{1}{3} - \frac{e^{-12}}{12} - \cancel{\frac{1}{90\,n^2}}} - \frac{1}{2}$, alors

$S(m) < S(n-1) + 1$ et le plus grand entier m cherché est supérieur ou égal à la partie entière de $e\sqrt{n^2 - n + \frac{1}{3} - \frac{e^{-12}}{12} - \frac{1}{90n^2}} - \frac{1}{2}$.

Tout le problème revient à prouver que ces deux réels ont la même partie entière.

Mon premier raisonnement consistait à dire : si m est compris entre $e\sqrt{n^2 - n + 0{,}16} - \frac{1}{2}$ et $e\sqrt{n^2 - n + 0{,}34} - \frac{1}{2}$, alors

$\left|\frac{2n+1}{2n-1} - e\right| < \frac{1}{2(2n-1)^2}$, ce qui est exact.

Or, cette inégalité implique que $\frac{2n+1}{2n-1}$ est une réduite de e : c'est encore exact. Et on connaît toutes les réduites de e : c'est incontestable, on n'en a pas découvert de nouvelles depuis 1995. Pour toutes les réduites ayant un numérateur et un dénominateur impair, $\left|\frac{2n+1}{2n-1} - e\right| < \frac{0{,}285}{(2n-1)^2}$: fatale erreur ! Cette inégalité n'est vraie que si $\frac{2n+1}{2n-1}$ est **irréductible**.

Considérons une réduite irréductible vérifiant :

$$\frac{0{,}016}{(2n-1)^2} < \frac{2n+1}{2n-1} - e < \frac{0{,}018}{(2n-1)^2}$$

et il en existe…, elles vérifient donc :

$\frac{0{,}4}{(5(2n-1))^2} < \frac{5(2n+1)}{5(2n-1)} - e < \frac{0{,}45}{(5(2n-1))^2}$ ce qui fournit la première exception annoncée, car rien n'autorise à supposer que $\frac{2n+1}{2n-1}$ soit irréductible !

Comment se sortir de ce mauvais pas ? A l'aide du résultat sophistiqué que voici :

quels que soient les entiers n et m ($n \neq 0$),

(1) $$|(3m^2 + 3m + 1) - (3n^2 - 3n + 1)\,e^2| > \frac{1}{3n^2}$$

Il en résultera en particulier que, quel que soit $n \geqslant 1$, il n'existe pas d'entier m tel que :

$$|(m^2 + m + 1/3) - (n^2 - n + 1/3)\, e^2| < \frac{e^2}{90n^2}$$

ce qui démontrera la première question corrigée ; et le fait que $\frac{1}{3} > \frac{e^2}{30}$ nous sera précieux pour la seconde question.

La démonstration de cette inégalité (**1**) fait appel à des connaissances précises sur les approximations diophantiennes, que je vais rappeler brièvement ici. Les réduites d'un réel strictement positif x, les meilleures approximations de x par des rationnels, s'obtiennent ordinairement par le développement de x en fraction continuée : si l'on pose $x_0 = x$, les suites $C_i = \mathrm{E}(x_i)$, $x_{i+1} = \frac{1}{x_i - c_i}$ permettent de construire deux suite :

$$a_0 = 1 \,;\, a_1 = c_0 \,;\, a_{i+1} = c_i a_i + a_{i-1}$$
$$b_0 = 0 \,;\, b_1 = 1 \,;\, b_{i+1} = c_i b_i + b_{i-1}$$

vérifiant entre autres choses :

$$\forall\, i \geqslant 1,\ a_i b_{i-1} - a_i - 1\ b_i = (-1)^i$$
$$x_i(a_i - b_i x) = -(a_{i-1} - b_{i-1} x)$$

et surtout, b_{i+1} est le plus petit entier $b \geqslant b_i$ tel qu'il existe un entier a pour lequel $|a - bx| < |a_i - b_i x|$.

Tout ceci se démontre par récurrence sur i. Les deux premières propriétés prouvent que

$$\bullet\ \forall i \geqslant 1,\ a_i - b_i x = \frac{(-1)^i}{x_i b_i + b_{i-1}}$$

et la troisième, qui sert ordinairement de définition à la notion de réduite, fournit le fait que si $\left|\frac{a}{b} - x\right| < \frac{1}{2\,b^2}$, $\frac{a}{b}$ est une réduite de e : sinon il existerait un indice i tel que $b_i < b < b_i + 1$ pour lequel $|a_i - b_i x| \leqslant |a - bx\,| < 1/2b$, ce qui est incompatible avec $\left|\frac{a_i}{b_i} - \frac{a}{b}\right| \geqslant \frac{1}{bb_i} > \frac{1}{2bb_i} + \frac{1}{2b^2}$

S'agissant du nombre e, son développement en fraction continuée (que l'on note : $x = [c_0, c_1, \ldots, c_i \ldots])$ s'obtient à l'aide de la suite de polynômes :

$P_0(x)$ 1, $P_1(x) = 1 + x$ et $\forall x \geqslant 1$ $P_{i+1}(x) = (2i+1)P_i(x) + x^2 P_{i-1}(x)$ qui vérifie par récurrence sur i:

$\forall i \geqslant 0$, $P_{i+1}(x) - P'_{i+1}(x) = x\,P_i(x)$

ce qui, toujours par récurrence sur i, permet d'encadrer :

$$\textbf{(2)}\quad \frac{2x^{2i+1}}{1.3.5\ldots(2i+1)} < \left|P_i(x)\,e^{-x} - P_i(-x)\,e^{x}\right| < \frac{x^{2i+1}}{1.3.5\ldots(2i+1)}\left(2 + \frac{Cx^2}{2i+3}\right)$$

C étant une constante choisie de sorte que $\forall t \in \,]0, x[$,

$$z\,t < e^t - e^{-t} < 2t + \frac{C+3}{3} \quad \text{(Si } x \leqslant 1\text{, on peut choisir } C = 1{,}1\text{).}$$

Si je pose $a_i = 2^i P_i\left(\frac{1}{2}\right)$ et $b_i = 2^i P_i\left(-\frac{1}{2}\right)$, j'ai :

$a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et $\forall i \geqslant 1$, $a_{i+1} = 2(2i+1)a_i + a_{i-1}$

$b_0 = 1$, $b_1 = 1$ et $\forall i \geqslant 1$, $b_{i+1} = 2(2i+1)b_i + b_{i-1}$.

On a : $b_{i+1} < \left(2(2i+1) + \frac{1}{2(2i-1)}\right)b_i$; et l'inégalité

$$\frac{1}{t+1} < Log\left(1 + \frac{1}{t}\right) < \frac{1}{t}$$

montre que $\forall i \geqslant z$, $\left(1 + \frac{1}{4(4i^2-1)}\right) < \left(\frac{i^2}{i^2-1}\right)^{1/15}$ d'où

$$b_i < \frac{7}{12}\,2^i\,(1.3.5\ldots(2i-1))\,2^{1/15}$$

ce qui entraîne : $\left|\frac{a_i}{b_i} - e\right| < \frac{1{,}03}{(2i+1)\,b_i^2}$, d'où l'on déduit que, pour tout $i \geqslant 1$, $\frac{a_i}{b_i}$ est une réduite de e. On n'obtient pas ainsi toutes les réduites de e, d'autant plus que $\left|a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i\right| = 2$. Comment obtenir les autres ?

Si a et b sont deux premiers entre eux, il n'existe que deux couples (a', b') et (a'', b'') tels que $|a'b - b'a| = |a''b - b''a| = 1$, avec $a' < a'' < a$.

On a d'ailleurs : $a' + a'' = a$, $b' + b'' = b$, et a/b est compris entre a'/b' et a''/b''. La réduite précédant a/b est obligatoirement l'une de ces deux fractions a'/b' ou a''/b'' : c'est a'/b' si a'/b' et a/b sont de part et d'autre du réel x, en l'occurrence e, et c'est a''/b'' sinon (auquel car a'/b' est la réduite précédant a''/b'').

Dans le cas de e, puisque tous les a_i et tous les b_i sont impairs, on a :

$$a'_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{2},\ b'_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2},\ a''_i = \frac{a_{i+1} + a_i}{2},\ b''_i = \frac{b_{i+1} + b_i}{2}$$

et $a'_i b_{i+1} - a_{i+1} b'_i = -\frac{1}{2}(a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i)$, ce qui prouve que e, qui est entre $\frac{a_i}{b_i}$ et $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}$ n'est pas entre $\frac{a'_i}{b'_i}$ et $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}$. La réduite précédant $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}$ est donc $\frac{a''_i}{b''_i}$, celle précédant $\frac{a''_i}{b''_i}$ est $\frac{a'_i}{b'_i}$ et celle d'avant, $\frac{a_i}{b_i}$: nous avons désormais toutes les réduites de e, dont le développement en fraction continuée s'écrit : $e = [2,1,2,1,1,4,1,1,\ldots 2i,1,\ldots]$.

Seulement les seules réduites qui nous intéressent sont celles dont le numérateur et le dénomminateur sont impairs, ce qui est le cas des $\frac{a_i}{b_i}$, mais pas des $\frac{a'_i}{b'_i}$ ni des $\frac{a''_i}{b''_i}$ puisque $|a'_i\, b_{i+1} - a_{i+1} b'_i| = |a''_i\, b_{i+1} - a_{i+1}\, b''_i| = 1$.

Oublions donc ces réduites intermédiaires ! Si ce n'est que nous avons besoin de la relation : $|a_i - b_i x| = \frac{1}{x_i b_i + b''_{i-1}}$ avec $x_i = [2i,1,1,2i+2,1,1,\ldots]$ pour mieux encadrer b_i : comme $2i < x_i < 2i + 1$ et $b_i/2 < b''_{i-1} < b_i$, $\frac{1}{(2i+2)\, b_i} < |a_i - b_i e| < \frac{1}{(2i + 1/2)\, b_i}$. Or, d'après **(2)** :

$$\frac{i\,!}{(2i+1)\,!}\sqrt{e} < |a_i - b_i e| < \frac{i\,!}{(2i+1)\,!}\sqrt{e}\left(1 + \frac{C}{16\,i}\right).$$

donc
$$\left(1 - \frac{0{,}57}{i}\right)\frac{2i\,!}{i\,!\sqrt{e}} < b_i < \left(1 + \frac{0{,}25}{i}\right)\frac{2i\,!}{i\,!\sqrt{e}}$$

Dans la mesure où $2(2i+1)\,b_1 < b_{i+1} < 2(2i+1)\,b_i\left(\frac{i^2}{i^2-1}\right)^{1/15}$ on peut encore préciser (en encadrant b_{i+j} pour j très grand) : $\forall i \geqslant 5$,

$$\text{(3)}\qquad \left(1 - \frac{1}{12\,i}\right)\frac{(2i)\,!}{i\,!\sqrt{e}} < \left(\frac{i-1}{i}\right)^{1/15}\frac{(2i)\,!}{i\,!\sqrt{e}} \leq b_i < \frac{(2i)\,!}{i\,!\sqrt{e}}$$

ce qui est encore vrai pour $i = 2$, 3 et 4.

On peut (et on doit) déterminer par un calcul similaire les réduites de e^2 : si je pose : $A_i = P_i(1)$ et $B_i = P_i(-1)$, j'ai :

$$A_0 = 1, A_1 = 2 \text{ et } \forall i \geqslant 1, A_{i+1} = (2i+1)A_i + A_{i-1}$$
$$B_0 = 1, B_1 = 0 \text{ et } \forall i \geqslant 1, B_{i+1} = (2i+1)B_i + B_{i-1}$$

et la relation (**2**) montre que $\left|\frac{A_i}{B_i} - e^2\right| < \frac{1.2}{(2i+1)B_i^2}$ donc les $\frac{A_i}{B_i}$ sont les réduites de e^2, mais ce ne sont pas les seules, d'autant que :
$|A_i\, B_{i-1} - A_{i-1}\, B_i| = 2$. On remarque que A_{3i+1}, et B_{3i+1} sont pairs, alors que A_{3i}, B_{3i}, A_{3i+2}, B_{3i+2} sont impairs : on en déduit que $\frac{A_{3i+1}/2}{B_{3i+1}/2}$ est la réduite comprise entre $\frac{A_{3i}}{B_{3i}}$ et $\frac{A_{3i+2}}{B_{3i+2}}$, car $\left|\frac{A_{3i+1}}{2}B_{3i+2} - A_{3i+2}\frac{B_{3i+1}}{2}\right| = 1$, alors que entre $\frac{A_{3i+2}}{B_{3i+2}}$ et $\frac{A_{3i+3}}{B_{3i+3}}$ s'intercalent "les mêmes" réduites que dans le cas de e. Le développement de e^2 en fraction continuée s'écrit donc : $e^2 = [7,2,1,1,3,18,5,1,1,6,30,8,1,1,\ldots 3i, 12i+6, 3i+2,1,1,\ldots]$.

Mais parmi toutes ces réduites, seules les $\frac{A_{3i}}{B_{3i}}$ et $\frac{A_{3i+2}}{B_{3i+2}}$ ont leurs numérateurs et dénominateurs tous deux impairs, et dans ces deux cas-là, les seuls qui nous intéressent, $\frac{1}{(i+2)B_i} < |A_i - B_i e^2| < \frac{1}{i\,B_i}$ d'où, en rapprochant de la relation (**2**), $\left(1 - \frac{2}{i}\right)\left(\frac{(2i)\,!}{i\,!\,2^i e}\right) < B_i < \left(1 + \frac{1}{2i}\right)\left(\frac{(2i)\,!}{i\,!\,2^i e}\right)$

et en utilisant $\left(1 + \frac{1}{4i^2 - 1}\right) < \left(\frac{i^2}{i^2 - 1}\right)^{15/4}$ pour $i \geqslant 2$,

(**4**) $\left(1 - \frac{1}{3i}\right)\left(\frac{(2i)\,!}{i\,!\,2^i e}\right) < B_i < \frac{(2i)\,!}{i\,!\,2^i e}$ pour tout $i \geqslant 2$.

Tout cela est classique, mais ce qui nous intéresserait, ce serait de prouver que si $\left|\left(3m^2 + 3m + 1\right) - \left(3n^2 - 3n + 1\right)e^2\right| \leq \frac{1}{3n^2}$, alors $\frac{3m^2+3m+1}{3n^2-3n+1}$ est une réduite de e (pas nécessairement irréductible).

Si le majorant était $\frac{1}{6n^2}$, on pourrait invoquer le théorème précédemment utilisé, mais on a $\frac{1}{3n^2}$ et c'est très important que le coefficient soit strictement supérieur à $\frac{e^2}{30}$.

Si a/b n'est pas une réduite d'un réel x mais vérifie : $\left|\frac{a}{b}-x\right| \leq \frac{\lambda}{b^2}$, alors le plus grand $b_i < b$ tel que a_i/b_i soit une réduite vérifie

$$|a_i - b_i x| \leqslant |a - bx| \Rightarrow \left|\frac{a_i}{b_i} - \frac{a}{b}\right| \leqslant \lambda\left(\frac{1}{b\,b_i} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Dès lors, $|a_i b - ab_i| < 2\lambda$. Or, quel que soit l'entier j, on connaît tous les couples (a, b) tels que $|a_i b - ab_i| = j$: ce sont les $(ka_i \pm ja_{i-1}\ ,\ kb_i \pm jb_{i-1})$ $k \in \mathbf{Z}$. Et la relation $a_{i-1} - b_{i-1}x = -x_i(a_i - b_i x)$ permet de calculer $|a - bx|$.

Limitons-nous au cas qui nous intéresse, λ=1. L'entier j ne peut être que 1.

Si $b = kb_i - b_{i-1}$, $|a - b\,x| = \frac{x_i + k}{x_i b_i + b_{i-1}} > \frac{1}{b_i} > \frac{1}{b}$

Si $b = kb_i + b_{i-1}$, pour que $b < b_{i+1}$, il faut que $k \leqslant C_i - 1 < x_i - 1$. Donc $\frac{k\,b_i + b_{i-1}}{x_i b_i + b_{i-1}} > \frac{k}{x_i}$.

Dès lors : si $2 \leqslant k \leqslant C_i - 2$, $|b\,(a - b\,x)| > \frac{(x_i - k)\,k}{x_i} \geqslant \frac{2(x_i - 2)}{x_i} > 1$

car $x_i > C_i \geqslant 4$.

Outre les réduites, seules peuvent vérifier $|a/b - x| \leqslant 1/b^2$, les fractions $\frac{a_i + a_{i-1}}{b_i + b_{i-1}}$ et $\frac{(C_i - 1)\,a_i + a_{i-1}}{(C_i - 1)\,b_i + b_{i-1}}$ lorsque $C_i \geqslant 2$.

Or toutes les réduites de e^2 pour lesquelles $C_i \geqslant 2$ sont connues : pour les unes, a_i et b_i sont impairs, mais a_{i-1} et b_{i-1} sont de parités distinctes ; pour les autres, a_i et b_i sont de parités distinctes, mais C_i est pair et a_{i-1} et b_{i-1} sont impairs : en aucun cas $\dfrac{a_i + a_{i-1}}{b_i + b_{i-1}}$ ni $\dfrac{(C_i - 1)\,a_i + a_{i-1}}{(C_i - 1)\,b_i + b_{i-1}}$ n'auront numérateur et dénominateur impairs, en aucun cas, ils ne pourront s'écrire :

$\dfrac{3m^2 + 3m + 1}{3n^2 - 3n + 1}$. Donc si $\left|(3m^2 + 3m + 1) - (3n^2 - 3n + 1)\,e^2\right| \leq \dfrac{1}{3n^2}$,

alors $\dfrac{3m^2 + 3m + 1}{3n^2 - 3n + 1}$ est une réduite (pas nécessairement irréductible) de e^2.

Mais $\dfrac{2m + 1}{2n - 1}$ est elle aussi une réduite de e, car

$$(2m + 1)^2 - (2n - 1)^2 e^2 = \frac{4}{3}\left[(3m^2 + 3m + 1) - (3n^2 - 3n + 1)\,e^2\right] + \frac{e^2 - 1}{3}$$

d'où

$$\frac{e - 1/e}{6\,(2n - 1)} - \frac{1}{3\,(2n - 1)^2} < (2m + 1) - (2n - 1)\,e < \frac{e - 1/e}{6\,(2n - 1)} + \frac{2}{9\,e\,n^2\,(2n - 1)}$$

or, $\dfrac{e - 1/e}{6} + \dfrac{2}{9e} < \dfrac{1}{2}$, les réduites irréductibles de e à numérateur et dénominateur impairs vérifiant :

$$\frac{1}{(2i + 2)\,b_i} < |a_i - b_i e| < \frac{1}{(2i + 1/2)\,b_i},$$

si d est le PGCD de $(2m + 1)$ et $(2n - 1)$, je dois avoir :

$$\frac{d^2}{2i + 2} < \frac{e - 1/e}{6} + \frac{2}{9en^2}$$

et

$$\frac{d^2}{2i + 1/2} > \frac{e - 1/e}{6} - \frac{1}{3\,(2n - 1)}$$

et donc, pour $i \geqslant 2$, $\dfrac{e - 1/e}{3}\,i < d^2 < \dfrac{e - 1/e}{3}\,i + 1$.

Or, $(2n - 1) = db_i$ et (relation (3)) $\left(1 - \dfrac{1}{12\,i}\right)\dfrac{(2\,i)\,!}{i\,!\,\sqrt{e}} < b_i < \dfrac{(2\,i)\,!}{i\,!\,\sqrt{e}}$ donc

$$\frac{1-e^{-2}}{4}\frac{(2i)!^2}{(i!)^2}\left(i-\frac{1}{6}\right) < 3n^2-3n+1 < \frac{1-e^{-2}}{4}\frac{(2i)!^2}{(i!)^2}\left(i+\frac{4}{3}\right)$$

Mais $3n^2 - 3n + 1$ est un multiple impair d'un B_j, pour $j \equiv 1$ (mod.3) et compte tenu que

$$\left(1+\frac{1}{6i}\right)^{-1}\frac{2^{2i}}{\sqrt{i\pi}} < \frac{(2i)!}{(i!)^2} < \frac{2^{2i}}{\sqrt{i\pi}}$$

d'après la formule de Stirling, la relation **(4)** entraîne :

$$\frac{1-e^{-2}}{2\sqrt{2}}\,i-0{,}11 < \frac{3n^2-3n+1}{B_{2i}} < \frac{1-e^{-2}}{2\sqrt{2}}\,i+0{,}6$$

Comme le majorant est inférieur à $(2i + 1)$, la réduite $\dfrac{3m^2+3m+1}{3n^2-3n+1}$

ne peut être que A_{2i} / B_{2i} ou une réduite précédente.

Mais alors $\left|\dfrac{3m^2+3m+1}{3n^2-3n+1}-e^2\right| > \dfrac{1}{(2i+2)B_{2i}^2}$

$$> \frac{\left(\frac{1-e^{-2}}{2\sqrt{2}}\,i-0{,}11\right)^2}{(2i+2)\left(3n^2-3n+1\right)^2}$$

$$> \left(\frac{i-2}{22}\right)\frac{1}{\left(3n^2-3n+1\right)^2}$$

Pour $i \geqslant 24$, $\dfrac{i-2}{22} \geqslant 1$,

donc on n'a pas $|(3m^2 + 3m + 1) - (3n^2 - 3n + 1)\,e^2| \leqslant 1/3n^2$.

Pour $i = 1$, $7/1$ s'écrit bien sous la forme $\dfrac{3m^2+3m+1}{3n^2-3n+1}$, néanmoins,

$|7 - e^2| > 1/3$ et pour $2 \leqslant i \leqslant 23$, on doit avoir :

$$\frac{3}{2} < \frac{e-1/e}{3}\,i < d^2 < \frac{e-1/e}{3}\,i+1 < 20,$$

d étant un entier impair : seul $i = 11$ permet d'avoir un tel d $(d = 3)$, mais alors, $2i = 22 \equiv 1$ (mod.3), donc A_{2i} et B_{2i} ne sont pas tous deux impairs. En aucun cas $|(3m^2 + 3m + 1) - (3n^2 - 3n + 1)\, e^2|$ ne peut être inférieur ou égal à $1/(3n^2)$, ce qui achève la démonstration de la relation (1), donc de la première question du problème :

$$\left|\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} - e^2\left(n^2 - n + \frac{1}{3}\right)\right|$$

ne peut pas être inférieur à $\dfrac{e^2}{90\,n^2}$.

$$e\sqrt{n^2 - n + \frac{1}{3} - \frac{e^{-2}}{12} - \frac{1}{90\,n^2}} - \frac{1}{2} \text{ et } e\sqrt{n^2 - n + \frac{1}{3} - \frac{e^{-2}}{12} + \frac{1}{90\,n^2}} - \frac{1}{2}$$

ont la même partie entière : le plus grand entier m tel que $S(m) - S(n-1) \leqslant 1$ est bien la partie entière de $e\sqrt{n^2 - n + \dfrac{1}{3} - \dfrac{e^{-2}}{12}} - \dfrac{1}{2}$.

Reste la seconde question : l'équation $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{q}$. Comme elle semble simple après tout ce qu'on vient de faire !

En testant toutes les possibilités pour $n \leqslant 5$, on trouve les trois solutions : $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{20}$. Prouvons qu'il n'en existe pas d'autre, en supposant désormais $n \geqslant 6$.

Soit p un nombre premier vérifiant : $n \leqslant p \leqslant m$. Dans la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k}$ n'apparaîtront qu'un ou deux termes dont le dénominateur soit multiple de p : $1/p$ ou éventuellement $1/2p$, car $3p > m$. p restera donc au dénominateur de la somme, et devra diviser q.

Or, pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe au moins un nombre premier p vérifiant : $n \leqslant p \leqslant \dfrac{4n+1}{3}$; et pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe au moins deux nombres premiers compris entre n et $(3/2)n + 2$. Ces deux lemmes que l'on vérifie à la main pour $n < 30$, se démontrent, pour $n \geqslant 30$, à l'aide d'un théorème effectif de Tchebycheff, selon lequel, pour $n \geqslant 30$, le nombre $\pi(n)$ de nombres premiers compris entre 2 et n vérifie :

$A\,(n/\mathrm{Log}n) \leqslant \pi(n) \leqslant 1{,}2A(n/\mathrm{Log}n)$ avec $A = \mathrm{Log}\left(\dfrac{2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}}{30^{1/30}}\right)$.

Comme pour $n \geqslant 30$,

$$\mathrm{Log}\left(\frac{4n+1}{3}\right) < 1{,}09\ \mathrm{Log}n \text{ et } \mathrm{Log}\,(3/2\ nl) < 1.12\ \mathrm{Log}\,n.$$

$$\pi\left(E\left(\frac{4n+1}{3}\right)\right) > \pi\ (n) \text{ et } \pi\left(E\left(\frac{3n+1}{2}\right)\right) > \pi\ (n) + 1$$

Pour n infiniment grand, ce premier résultat de Tchebycheff a été considérablement amélioré, mais ces améliorations ne sont pas effectives pour les petites valeurs de n, donc pas utilisables pour notre problème où la moindre faille peut faire manquer une solution de l'équation. Notons qu'en combinant ces deux résultats, on peut affirmer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe au moins trois nombres premiers compris entre n et $2n + 3$: il en existe deux entre n et $(3/2)\,n + 2$, et un entre $E\,((3/2)\,n + 3)$ et $2n + 13/3$, ce dernier ne pouvant être égal à $2n + 4$.

Si $m < \dfrac{4n+1}{3}$, alors (dans l'hypothèse $n \geqslant 6$),

$$S\,(m) - S\,(n-1) < \mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{m^2 + m + 1/3}}{\sqrt{n^2 - n + \alpha}} < \mathrm{Log}\,\frac{m + 2/3}{n - 1/2} < \mathrm{Log}\,\frac{18}{11} < \frac{1}{2}$$

Il est donc exclu que $S\,(m) - S\,(n-1) = 1 - 1/q$. Mais si $m \geqslant \dfrac{4n+1}{3}$, il existe un nombre premier p compris entre n et m ; q, divisible par p, est supérieur ou égal à n, donc

$$S\,(m) - S\,(n-1) \geqslant 1 - 1/n \Rightarrow \frac{m + 2/3}{n - 1/2} > e\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

S'il en est ainsi, $m > en - ((3/2)\,e + 2/3) > (3/2)\,n + 2$. il existe donc deux nombres premiers au moins entrte n et m, et

$$q > n^2 \Rightarrow \frac{m^2 + m + \frac{1}{3}}{n^2 - n + \frac{1}{3} - \frac{1}{90\,n^2}} > e^2\left(1 - \frac{2}{m^2}\right).$$

Si l'on pose $\alpha = \dfrac{1}{3} - \dfrac{e^{-2}}{12} - \dfrac{1}{90.6^2} > 0{,}32$, $m > e\,\sqrt{n^2 - n + (\alpha - 2)} - \dfrac{1}{2}$.

Il existe donc au moins trois nombres premiers compris entre n et m, dont l'un au moins est supérieur ou égal à 13 : cela résulte de $e\sqrt{28} - \frac{1}{2} > 13$ et, pour $n \geqslant 7$, $m > en - 2 > 2n + 3$. Donc $q > 13n^2$ et

$$m > e\sqrt{n^2 - n(\alpha - 2/13)} - 1/2 > e\sqrt{n^2 - n + 0{,}16} - 1/2\ .$$

Dès lors, $\frac{2m+1}{2n-1}$ est une réduite de e et l'on a :

$$m < e\sqrt{n^2 - n + \frac{1}{3} - \frac{e^{-2}}{12} - \frac{e^{-2}}{9n^2}} - \frac{1}{2}$$

donc $S(m) - S(n-1) < 1 - 1/(510n^4)$.

Or, $\frac{2m+1}{2n-1}$ étant supérieur à e, n est au moins égal à 36 (réduite 193/71) et $m \geqslant 2{,}5n$: le théorème de Tchebycheff suffit à prouver que pour $n \geqslant 36$, il existe au moins 6 nombres premiers entre n et $2{,}5n$, donc que q devrait être supérieur à 36^2n^4, impossibilité qui achève la démonstration.