# La règle, un instrument de géométrie projective

**Rudolf Bkouche**
IREM de Lille

La rubrique "Avis de Recherche " du *Bulletin* n°406 proposait la question suivante : "*Peut-on construire la parallèle à une droite passant par un point donné uniquement à la règle ?*"[1]

Question bien plus importante qu'un simple avis de recherche puisqu'il s'agit des rapports entre l'usage des instruments géométriques et les propriétés géométriques mises en jeu.

Il est vrai que depuis que l'on sait que la géométrie de la règle et du compas est liée à la résolution d'équations algébriques de degré au plus 2, lesquelles expriment les problèmes d'intersections de droites et de cercles[2], on aimerait bien pouvoir dire que la géométrie de la règle est liée à la résolution d'équations du premier degré dans la mesure où ces équations expriment des problèmes d'intersections de droites ; autrement dit, si la règle et le compas sont les instruments de la géométrie des cercles et des droites, alors la règle est l'instrument de la géométrie des droites. Mais qu'est-ce que la géométrie des droites ? on peut hésiter entre la géométrie affine, laquelle exprime les

[1] Avis de recherche *Bulletin*, n°406, septembre-octobre 1996 (avis n°54).

[2] Henri Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques* (1950), réédition Gabay, Paris 1987.

propriétés élémentaires des droites[3] et, du point de vue analytique, correspond à la théorie des équations linéaires, et la géométrie projective que l'on peut considérer comme une géométrie des droites plus sophistiquée dans la mesure où elle fait appel à la notion de point à l'infini.

Si la géométrie de la règle était la géométrie affine, il faudrait pouvoir construire, avec la seule règle, la parallèle à une droite donnée passant par un point donné; or nous venons qu'une telle construction est impossible. Si, par contre, la géométrie de la règle est la géométrie projective, la question se pose du lien entre les constructions à la règle et les éléments à l'infini.

Mais ici une autre question se pose, la construction de la parallèle à une droite donnée passant par un point demande d'autres instruments que la règle et l'on sait comment l'usage de la règle et du compas permet de construire le quatrième sommet d'un parallélogramme connaissant trois points, ou ce qui revient au même, *la somme de deux vecteurs liés* [4] de même origine (règle du parallélogramme). C'est que si le parallélisme relève, du point de vue de la théorie des groupes, de la géométrie affine, il est aussi susceptible d'une définition purement métrique: des droites parallèles sont des droites équidistantes. Cette dernière définition a joué un rôle important, il suffit de rappeler la double définition des droites parallèles données par Arnauld:

> "*Mais ces lignes (les lignes parallèles) peuvent être considérées selon deux notions différentes, l'une négative et l'autre positive.*
> *La négative est de ne se rencontrer jamais, quoi que prolongées à l'infini.*
> *La positive, d'être toujours également distantes l'une de "l'autre, ce qui consiste en ce que tous les points de chacune sont également distants de l'autre*"[5]

On peut aussi rappeler comment, pour démontrer le postulat des parallèles Ibn AlHaytham s'appuyait sur la propriété suivante qui lui paraissait plus "évidente" :

> "*Une droite de longueur constante, qui se meut orthogonalement sur une autre droite située dans un même plan, engendre par son extrémi-*

[3] Pour un exposé élémentaire de la géométrie affine, nous renvoyons à l'ouvrage de Frédéric Pham et Hervé Dillinger, *Algèbre linéaire*, "Bibliothèque des Sciences", Diderot Editeur, Arts et Sciences, Paris 1996, et à l'article de Frédéric Pham, "Vivent les déterminants!", *Repères-IREM*, n° 26, janvier 1997.

[4] J'emploie à dessein une terminologie qui peut sembler désuète mais qui nous reppelle que le règle du parallélogramme, avant que d'être géométrique, relève de la statique, un vecteur lié représentant une force appliquée en un point.

[5] Arnauld, *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Paris 1667 - p. 103-104.

*té libre une droite parallèle à la droite sur laquelle elle se meut, et toutes les perpendiculaires abaissées de l'une sur l'autre sont égales.* "[6]

Cette prégnance du métrique dans la définition des parallèles nous rappelle le caractère problématique de toute classification; c'est ce caractère problématique qui permet à la fois de considérer le parallélisme comme une propriété affine et de situer la géométrie de la règle dans un cadre projectif; c'est encore ce caractère problématique qui permet de comprendre ce paradoxe d'une construction qui fait appel au métrique (l'usage du compas) pour une situation affine, voire la situation affine fondamentale.

On pourrait évidemment renvoyer à l'usage de la bande parallèle[7], mais le métrique y réapparaît avec l'épaisseur de la bande, épaisseur qui intervient dans la discussion des diverses constructions. On peut cependant remarquer le caractère "unidimensionnel" de l'épaisseur, ce qui nous renvoie à des phénomènes purement affines.

Tout cela pour dire que les classifications se situent toujours dans un contexte et qu'il n'est pas facile de lire l'impossibilité de la construction demandée dans l'avis de recherche n°54 à la seule lumière des classifications canoniques, celle du *Programme d'Erlangen* ou celle de la géométrie analytique.

## Un problème exemplaire

On peut donner une première réponse "technique" à la question posée si l'on remarque que tracer une droite à la règle suppose que l'on connaisse deux points de la droite. La question se ramène ainsi à trouver un second point de la parallèle cherchée, mais ce second point, pour être construit à la règle, doit être défini comme intersection de deux droites, lesquelles doivent pouvoir être construites à partir des données, la droite et le point.

Pour préciser cela nous reviendrons sur un problème classique : deux droites étant données qui ne se coupent pas sur la feuille de papier et un point, construire la droite joignant le point donné au point d'intersection des deux droites données.

Nous indiquons ici la construction proposée par Lambert[8]

---

[6] Khalil Jaouiche, *La Théorie des Parallèles en Pays d'Islam*, Vrin, Paris 1986, p. 65 ; la traduction du texte d'Ibn Al-Haytham est donnée page 162.

[7] Daniel Berthe, *Géométrie de la bande à bords parallèles*, IREM de Lille, juin 1991.

[8] Jean-Henri Lambert, *Notes et additions à la perspective affranchie du plan géométral*, in Roger Laurent et Jean Peiffer, *La place de J.H. Lambert dans l'histoire de la perspective*, Cedic/Nathan, Paris 1987, p. 268.

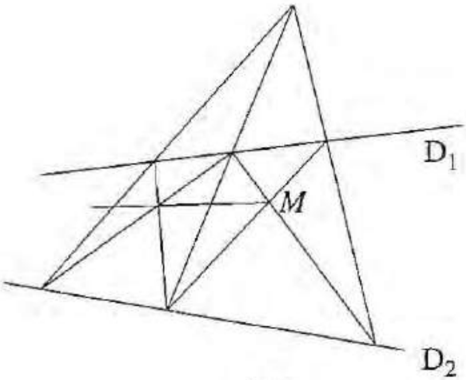


fig. 1

On remarque, en effet, qu'une perspective convenable permet de se ramener au cas où les droites données sont parallèles, auquel cas la construction résulte du théorème de Thalès.

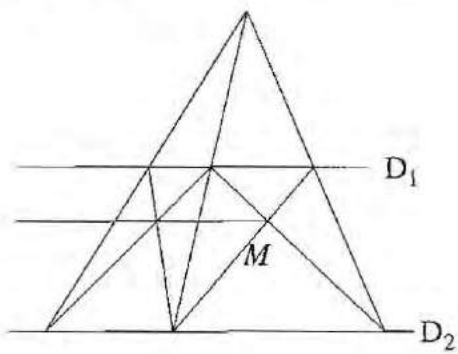


fig.2

On peut aussi raisonner directement en considérant que la droite cherchée est la polaire par rapport aux droites données d'un point conjugué du point $P$ (ce qui revient à considérer la forme projective du théorème de Thalès, autrement dit le théorème de Desargues).

Notons que le fait que les droites se coupent ou non n'intervient pas dans la construction, autrement dit la construction est la même, que les droites données soient parallèles ou non ; cette remarque souligne le caractère projectif de la construction.

Du point de vue analytique, la question peut être posée de la façon suivante :

Etant données deux droites $D_1$ et $D_2$ d'équations respectives

$$A_1 = 0 \qquad\qquad A_2 = 0$$

et un point $M$, déterminer la droite passant par $M$ et le point d'intersection des droites $D_1$ et $D_2$.

On sait qu'une droite $\Delta$ passe par le point d'intersection des droites $D_1$ et $D_2$ si et seulement si son équation s'écrit

$$A_1 + \lambda A_2 = 0$$

La droite $\Delta$ passe par le point $M$ si et seulement si

$$A_1(M) + \lambda A_2(M) = 0$$

ce qui détermine la valeur de $\lambda$ (on a supposé ici que le point $M$ n'appartient pas à l'une des droites $D_1$ ou $D_2$.)

Notons que lorsque les droites $D_1$ et $D_2$ sont parallèles, le calcul est le même qui détermine la droite passant par le point $M$ et parallèle aux droites $D_1$ et $D_2$ ; cela montre encore une fois le caractère projectif du problème. Notons que ce caractère projectif apparaît directement si l'on use de coordonnées homogènes.

## Une construction de Lambert

Un cas particulier de la construction précédente est étudié par Lambert, qui explique comment, un parallélopamme *ABCD* étant donné dans le plan, on peut construire, avec la seule règle, la parallèle à une droite donnée $\Delta$ passant par un point donné $P$[9].

Le principe de la construction repose sur la perspective (fig.3) : si l'on considère la droite donnée $\Delta$ comme la ligne de terre et le point donné $P$ comme le point de fuite des droites $AB$ et $CD$, tout revient à construire le point de fuite des droites $AC$ et $BD$. Si l'on connaît la perspective $\delta$ de la diagonale $AC$, on pourra alors construire la perspective *abcd* du parallélogramme *ABCD* et par conséquent les

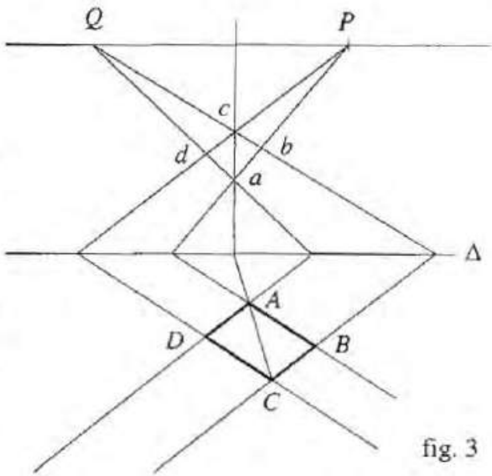

fig. 3

[9] *ibid, p. 266.*

perspectives des droites $AC$ et $BD$ et le point de fuite $Q$ ; la droite $PQ$ est alors parallèle à la droite donnée $\Delta$.

On peut montrer directement, c'est-à-dire sans faire appel à la perspective, que la droite $PQ$ est parallèle à la droite $\Delta$. Il suffit de remarquer que la perspective peut être définie comme une homologie qui laisse fixes les points de la droite $\Delta$ et qui envoie le point à l'infini de la direction $AB$ au point $P$ ; le centre d'une telle homologie peut être choisi arbitrairement sur la parallèle à la droite $AB$ menée par le point $P$, il est déterminé dès que l'on se donne l'image $a$ de $A$ sur la droite $Pe$ (ce qui correspond au choix de la perspective de la diagonale $AB$ dans la construction de Lambert); les points $b$, $c$, $d$ images respectives des points $B$, $C$, $D$ sont alors déterminés et l'image du point à l'infini de la direction $AD$ est l'intersection des droites $ad$ et $bc$, soit $Q$. On sait que l'image des points à l'infini par une homologie est parallèle à la droite des points fixes, ici la droite $\Delta$ (il suffit de remarquer que le point à l'infini de la droite des points fixes est fixe), il s'ensuit que la droite $PQ$ est parallèle à $\Delta$, ce qui achève la démonstration [10].

Une analyse de cette construction montre que tout revient à construire une droite passant par le point donné $P$ et par l'intersection de la droite donnée $\Delta$ avec la droite de l'infini, celle-ci étant déterminée par les deux directions des côtés du parallélogramme. Ainsi le problème est projectivement équivalent à la construction d'une droite passant par un point donné et par l'intersection de deux droites données, construction qui relève de la seule règle.

La règle apparaît ainsi comme un instrument de la géométrie projective. Une telle remarque nous renvoie à la place de la géométrie affine dans la classification à la Erlangen des géométries. Dans son article de 1872, Felix KLEIN ne mentionne pas la géométrie affine ; en fait la question que résout le *Programme d'Erlangen* est celle du rapport entre la géométrie usuelle (la géométrie métrique) et la géométrie projective, rapport que CAYLEY, remarquant que les propriétés métriques du plan sont liées aux points cycliques, décrivait de la façon suivante:

> *"Metrical geometry is thus a part of descriptive geometry, and descriptive geometry is **all** geometry, and reciprocally."* [11]

---

[10] Sur les relations entre les constructions perspectives et l'homologie, on peut lire Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, réédition J. Gabay, Paris 1996, p. 154-156 et Chasles, *Aperçu historique des origines et du développement des méthodes en géométrie*, réédition Gabay 1989, p. 346-347.

[11] Arthur Cayley, "A sixth memoir upon quantics", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol.CXLIX, 19859 ; n° 158 in *Collected Mathemlatical Papers*, o.c. vol II, p. 561-592.

La géométrie métrique plane peut alors être définie comme la géométrie définie par le sous-groupe du groupe des homographies planes qui conserve une paire de points (les points cycliques); quant à la géométrie affine, elle apparaît alors comme une géométrie intermédiaire, définie par le sous-groupe des homographies planes qui conserve une droite (la droite de l'infini). Pour déterminer un plan affine, il suffit alors de se donner une droite dans le plan projectif, soient deux points ou, ce qui revient au même, quatre droites définissant ces deux points; si la droite qui définit la structure affine est la droite de l'infini, il suffit donc de se donner un parallélogramme et l'on retrouve le point de vue de Lambert. Si la règle est l'instrument de la géométrie projective, la donnée d'un parallélogramme permet alors d'effectuer à la règle les constructions de la géométrie affine.

On pourrait alors poser la question (qui serait l'avis de recherche n°54 bis) : **quel sont les instruments de la géométrie affine** ?

## Un instrument de la géométrie affine : le Té

L'instrument de la géométrie affine est bien connu, c'est le Té de la planche à dessin. Il se compose d'une première règle glissant sur le bord de la planche et d'une règle mobile autour d'un point de la première règle (fig. 4).

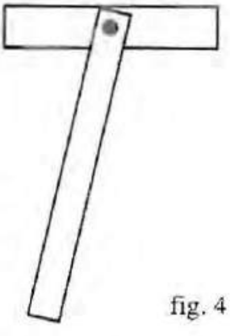

fig. 4

En fixant la seconde règle par rapport à la première, on définit une direction de droites, autrement dit un point à l'infini. On peut alors considérer que le Té réalise la droite de l'infini, un point d'icelle étant déterminé dès que l'on a fixé la direction de la seconde règle. Le problème de mener la parallèle à une droite donnée par un point donné apparaît ainsi comme un cas particulier du problème général : construire la droite passant par un point donné et par le point d'intersection de deux droites données.

## Un point de vue structural

Les remarques ci-dessus montrent la forte solidarité entre la géométrie affine et la géométrie projective, la géométrie affine étant définie par la donnée du plan projectif et d'une droite de ce plan; que cette droite soit à distance finie ou à l'infini importe peu, ce que précise une approche structurale.

Il est bien connu que, du point de vue structural, la géométrie élémentaire[12] est un simple chapitre de l'algèbre linéaire comme l'explique Jean DIEUDONNÉ dans son ouvrage *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*[13]. Si l'on ne peut réduire la géométrie élémentaire au seul point de vue structural, celui-ci permet une classification rationnelle des géométries via la théorie des groupes[14], classification reformulée dans le cadre de l'algèbre linéaire sous la forme que nous connaissons aujourd'hui [15]. Mais l'apport du point de vue structural n'est pas seulement dans l'algébrisation de la géométrie; il est autant, et c'est l'un des aspects les plus riches du point de vue structural, dans la géométrisation de l'algèbre, c'est cette géométrisation qui nous permet de porter un nouveau regard sur la géométrie.

De ce point de vue géométrie affine et géométrie projective apparaissent moins comme deux géométries distinctes que comme deux modes de lecture de l'algèbre linéaire [16].

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel défini sur un corps $\mathbb{K}$, un *espace affine* $\mathcal{E}$ est un ensemble sur lequel le groupe additif des vecteurs de $\mathbb{E}$ opère *simplement transitivement*, c'est-à-dire que, pour tout couple de points $(A, B)$ de l'espace affine $\mathcal{E}$, il existe un vecteur $\mathbf{u}$ et un seul tel que $B = \tau_{\mathbf{u}}(A)$, $\tau_{\mathbf{u}}$ désignant l'action du vecteur $\mathbf{u}$ sur l'espace affine $\mathcal{E}$.

On appelle *espace projectif* l'ensemble des droites vectorielles d'un espace vectoriel .

Ainsi on peut considérer un espace affine comme un espace vectoriel dont on a oublié l'origine et un espace projectif comme l'ensemble des droites d'un espace affine passant par un point de cet espace; c'est la double lecture annoncée ci-dessus.

Cela dit, on montre aisément que, un hyperplan vectoriel étant donné dans un espace vectoriel, l'ensemble des droites vectorielles non conte-

---

12 Nous entendons ici par géométrie élémentaire aussi bien la géométrie métrique usuelle que la géométrie projective ; c'est par exemple le contenu des *Leçons de Géométrie élémentaire* de Jacques Hadamard (réédition Gabay, Paris 1989).

13 Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1964.

14 En ce sens, on peut considérer Félix Klein comme l'inventeur du point de vue structural.

15 Pour un exposé "algèbre linéaire" de la géométrie élémentaire, on peut lire, outre l'ouvrage cité de Dieudonné, l'ouvrage de Claude Tisseron, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann, Paris 1983.

16 Rudolf Bkouche, "Le projectif ou la fin de l'infini", in *Histoire d'Infini*, Colloque Inter-IREM Epistémologie (Landernau 1992), Editions IREM de Brest, 1994.

nues dans cet hyperplan est un espace affine, l'espace vectoriel associé étant l'hyperplan donné et les droites vectorielles contenues dans l'hyperplan jouant le rôle de points à l'infini.

Réciproquement, étant donné un espace affine $\mathcal{E}$ d'espace vectoriel associé $\mathbb{E}$, l'espace affine $\mathcal{E}$ peut être identifié à l'ensemble des droites vectorielles de l'espace vectoriel $\mathbb{E} \oplus \mathbb{K}$ non contenues dans l'hyperplan vectoriel $\mathbb{E}$

Ainsi, parler de géométrie affine ou de géométrie projective n'est qu'une façon de dire des propriétés d'algèbre linéaire; une telle affirmation s'inscrit dans un point de vue structural de la géométrie et l'on sait combien un tel point de vue est réducteur. Reste que ce point de vue permet de comprendre les relations entre les divers aspects de la géométrie et c'est sur lui que nous nous appuyons pour tenter de comprendre ce qui pourrait être le paradoxe de la géométrie affine, l'impossibilité de construire avec la seule règle la parallèle à une droite donnée passant par un point donné.

On pourrait de même expliquer pourquoi cette construction relève de la géométrie métrique (via l'usage de la règle et du compas) si l'on revient à la définition des parallèles comme droites équidistantes.

On notera $I$ et $J$ les points cycliques (points communs à tous les cercles du plan euclidien) et $A$ le point à l'infini définissant la direction d'une famille de droites parallèles; soit alors trois droites $D_1$, $D_2$, $D_3$ passant par le point $A$ ; considérons alors un point $B$ quelconque à l'infini, toute droite $\Delta$ passant par $B$ recoupe les droites respectivement en trois points $P_1$, $P_2$, $P_3$, alors le birapport $(B, P_1, P_2, P_3)$ ne dépend pas de la droite $\Delta$ et il suffit de remarquer que ce birapport n'est autre que le rapport des distances entre les droites $(D_1, D_2)$ et $(D_1, D_3)$. Notons que les points $I$ et $J$ ne jouent ici qu'un rôle secondaire, ils se contentent de définir la droite de l'infini, ce qui revient à dire que le choix de la métrique est secondaire.

La propriété énoncée par Ibn Al-Haytham citée au début de cet article peut alors s'écrire: ,

> *Etant donnée une droite $\infty$ et deux points A et B de cette droite et soient deux droites $D_1$, $D_2$ passant par A, $\Delta$ une droite variable passant par B et rencontrant les droites $D_1$ et $D_2$ respectivement aux points $P_1$ et $P_2$; le lieu du point $P_3$ de la droite $\Delta$ tel que le birapport $(B, P_1, P_2, P_3)$ reste constant est une droite passant par le point B.*

Notons que pour avoir l'énoncé exact de Ibn Al-Haytham, il faut se donner les points $I$ et $J$ et supposer que le point $B$ est le conjugué harmonique de $A$ par rapport à $I$ et $J$ (ce qui revient à dire que les droites passant par le point $B$ sont orthogonales aux droites passant par le point $A$).