La géométrie au Collège au travers des niveaux de P.M. van HIELE.

Annette MICHOUX - BRACONNE
Collège Louis Lumière MARLY LE ROI

1. Introduction générale

Comme professeur de mathématiques en Collège, j'ai été confrontée pendant de nombreuses années au problème de l'enseignement de la démonstration en géométrie en 4$^{\text{ème}}$, sans pouvoir y apporter de solution satisfaisante. Or dans le cadre d'une recherche en didactique que j'ai faite à l'Université Laval de Québec [1], j'ai appris que cette question avait déjà été abordée dès 1957 (!) par un couple d'enseignants hollandais, P.M. van HIELE et son épouse Dina van HIELE-GELDOF [2].

Face à ce problème, après maintes observations, études, analyses et réflexions, ils ont imaginé une théorie d'apprentissage de la géométrie, théorie d'essence constructiviste et qui respecte les trois composantes de la didactique : le professeur, l'élève et la matière à enseigner.

Par ailleurs un certain nombre de recherches et de publications américaines [3] [4] [5] ont eu lieu en collaboration avec P.M. van Hiele dans le but de tester la pertinence, la fiabilité et les limites de cette théorie

C'est un résumé de plusieurs de ces publications que je vous propose ici, complété du rapport de mon expérience personnelle dans l'application de cette théorie.

2- Présentation de la théorie elle-même

Les van Hiele ont tout d'abord repéré certaines discontinuités dans les processus d'apprentissage comme si l'élève progressait par bonds successifs, passant ainsi d'un niveau à un autre. Toutefois, si une certaine « maturation » dans un niveau est nécessaire pour favoriser le passage à un niveau supérieur, celui-ci ne sera jamais un passage spontané et doit donc être conduit par l'enseignant.

Aucun niveau ne peut être sauté et le passage d'un niveau au niveau supérieur demande un certain temps : il ne peut se faire en une ou deux heures de cours mais sur une période de 6 mois à un an.

De plus, dans la conférence qu'il a prononcée à Sèvres en 1959 [6], P-M. van Hiele précisait :

« Ces niveaux sont inhérents à l'élaboration de la pensée ; ils sont indépendants de la méthode d'enseignement suivie. Il se peut cependant que certaines méthodes d'enseignement ne permettent pas d'atteindre des niveaux supérieurs, de sorte que les façons de penser employées à ces niveaux restent inaccessibles aux élèves. Les points suivants peuvent contribuer à préciser les niveaux de pensée :

a) A chaque niveau apparaît de façon extrinsèque ce qui était intrinsèque au niveau précédent.

b) Chaque niveau a ses propres symboles linguistiques et son propre réseau de relations unissant ces signes. Une relation « exacte » à un niveau peut se révéler inexacte à un autre.

c) Deux personnes qui raisonnent à deux niveaux différents ne peuvent se comprendre. C'est ce qui arrive souvent pour le professeur et l'élève.

d) La maturation qui mène à un niveau supérieur se déroule d'une façon très particulière. On peut y déceler plusieurs phases (...). Il est donc possible et souhaitable que le professeur la favorise et l'accélère. » (fin de citation)

III Description des différents niveaux

Niveau 0 : Identification Visualisation.

C'est le niveau de base pour P.M. van Hiele [6].

« A ce niveau les figures sont jugées d'après leur apparence. Un enfant reconnaît un rectangle à sa forme et un rectangle lui semble différent d'un cané. ..... (Il) ne reconnaît pas un parallélogramme en un losange. ... Le losange n'est pas un parallélogramme : le losange lui apparaît comme quelque chose de b;en différent_ »

A la question [3] concernant la reconnaissance d' « un carré sur la pointe » comme un carré, P-M. van Hiele a répondu : « Niveau de base parce que ça se voit ».

Niveau 1 : Analyse.

« A ce niveau, les figures sont porteuses de leurs propriétés. Qu'une figure est un rectangle, signifie qu'elle a quatre angles droits, que les diagonales sont égales et que les côtés opposés sont égaux. Les figures se reconnaissent à leurs propriétés. Si l'on nous dit que la figure tracée au tableau possède quatre angles droits, c'est un rectangle, même si la figure n'est pas tracée avec soin. Mais à ce niveau, les propriétés ne sont pas encore ordonnées de sorte qu'un carré n'est pas nécessairement identifié comme étant un rectangle. »[6]

« Un élève à ce niveau est capable d'associer le nom «triangle isocèle » à un triangle particulier, sachant que deux de ses côtés ont la même longueur, et en conclure que les deux angles correspondants ont eux-aussi la même mesure ». [2]

Il associe à chaque figure une litanie de propriétés sans liens déductifs les unes avec les autres.

Niveau 2 : Déduction informelle

A ce niveau, « les propriétés s'ordonnent. Elles se déduisent les unes des autres : une propriété précède ou suit une autre propriété. » [6]

Pour déterminer un rectangle, un élève est capable de sélectionner des conditions suffisantes à l'intérieur de la litanie évoquée plus tôt. Ceci étant, il ordonne logiquement les propriétés et commence à apprécier le rôle des définitions générales. De simples déductions peuvent être faites et les inclusions de classes de figures sont reconnues (ex : les carrés sont aussi des rectangles).

Toutefois, « à ce niveau la signification intrinsèque de la déduction n'est pas comprise par les élèves. » [6]

Niveau 3.: Déduction formelle

A ce niveau, « la pensée s'occupe de la signification de la déduction, de la réciproque d'un théorème, d'un axiome, de la condition nécessaire et suffisante ». [6]

Le rôle des axiomes, des termes non définis et des théorèmes étant bien compris, l'élève peut distinguer une proposition de sa réciproque, il peut aussi construire des démonstrations originales.

Niveau 4 : Rigueur

Un élève ayant atteint cet ultime niveau de la pensée en géométrie, peut faire des comparaisons entre les différentes axiomatiques : par exemple, que se passe-t-il si l'on rejette l'axiome d'Euclide?

Mais l'expérience a montré que ce dernier niveau n'était pas facile à définir et à mesurer, et P.M. van Hiele lui-même n'est pas certain qu'il existe réellement. Surtout il serait de piètre intérêt pour nous autres enseignants de Collège.

III. La théorie au quotidien

Dans les programmes.

Même si les niveaux de van Hiele n'ont jamais été cités dans les programmes, ils peuvent néanmoins très facilement y être intégrés et apporter des éléments de réponse en termes d'activités à mener en classe ou à donner en contrôle, à des objectifs définis de manière très générale.

Ainsi, dans l'introduction générale aux nouveaux programmes, au paragraphe A de la page 15, on peut lire : « A travers (...) l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique ... ». On peut alors comprendre que le but ultime de l'enseignement de la géométrie au Collège est d'amener les élèves au niveau de déduction formelle (niveau 3) sans pour autant négliger les niveaux inférieurs. D'ailleurs une large expérience menée au Etats Unis a montré que le cours de géométrie avec démonstration se situe bien au niveau 3 mais que la grande majorité des élèves inscrits à ce cours ne dépasse guère le niveau 1 et certains étudiants ne maîtrisent même pas le niveau de base (niveau 0). Ces élèves n'ont jamais pu acquérir quelque compétence que ce soit en terme de démonstration en géométrie.

Ensuite, à propos des travaux géométriques, au paragraphe A de la page 16, les objectifs des programmes sont entre autres :

- passer de l'identification perceptive (la reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leurs caractérisations par des propriétés ; (...)
- « prendre contact avec des théorèmes et apprendre à les utiliser. » On retrouve là le passage du niveau de base au niveau 3 en passant par le niveau 2.

Puis dans les objectifs généraux du programme de 6$^{\text{ème}}$, il est dit que :

« L'enseignement de mathématiques en classe de 6ème comporte deux aspects :

- il apprend à relier des observations du réel à des représentations : schémas, tableaux, figures;
- il apprend aussi à relier ces représentations à une activité mathématique et à des concepts.

Cette démarche (...) doit notamment :

- développer les capacités de raisonnement : observation, analyse, pensée déductive ».

Dans ce dernier paragraphe, le rapprochement avec la théorie de van Hiele est là encore immédiat : le même vocabulaire y est utilisé. On peut donc interpréter ce texte comme une incitation à conduire les élèves au travers des différents niveaux sans en sauter un seul, en particulier ne pas négliger le niveau 1 (niveau d'analyse) où les élèves ne peuvent faire autre chose que réciter toute les propriétés d'une figure sans discernement, ce qui est en général assez frustrant pour l'enseignant !

Enfin dans les compléments de programme, les niveaux de van Hiele sont en filigrane dans le paragraphe III - Autour du raisonnement : « Entre une géométrie d'observation et une géométrie de déduction, il est nécessaire de développer des apprentissages qui initient les élèves à la démonstration.(...). En classe de 6ème, des activités géométriques appropriées peuvent préparer le raisonnement déductif... . » Si les expressions «géométrie d'observation» et «géométrie de déduction » évoquent directement les niveaux de base et niveau 3 de la théorie de P.M. van Hiele, on peut regretter qu'il n'y ait pas d'exemple d' « activités appropriées » permettant le passage de l'une à l'autre.

Dans ma pratique quotidienne.

Pour résumer on pourrait dire que les élèves devraient arriver au niveau de base de van Hiele en 6ème et quitter la classe de 5ème en maîtrisant le niveau 2 de déduction informelle, pour qu'ils aient une chance d'aborder le programme de 4ème dans de bonnes conditions.

En 6ème, l'Evaluation Nationale de septembre me permet de vérifier que la plupart des élèves maîtrisent le niveau de base. Dans leur grande majorité, les élèves arrivant dans notre collège connaissent les mots « losange », « carré » etc, sans pour autant reconnaître qu'un carré est aussi un losange. D'où certaines discussions fort âpres en classe lorsque le carré est « posé sur la pointe »! C'est alors le début de l'identification des figures par la liste de leurs propriétés et plus la liste est longue plus la figure est une figure particulière.

Vient ensuite un long travail de lecture d'énoncés en français et sous formes de figures codées, plus rarement à l'aide de symboles. Les questions sont presque toujours les mêmes : « Quelles sont les informations que l'on nous donne pour cet exercice? De quoi est-on sûr ? Quel nouveau renseignement peut-on ajouter? » Pour presque tous ces exercices, y compris ceux qui demandent une construction précise, j'utilise les figures faites à main levée où l'élève est amené à analyser la situation (niveau 1) et ne peut plus croire ce qu'il voit. Lorsque la figure est construite proprement, l'analyse est plus complexe en fait parce que l' « on voit les choses » et il faut dresser un inventaire très précis des informations données dans l'énoncé pour faire la distinction entre l'énoncé lui-même et les conclusions que l'on peut en tirer. Le but est alors que les élèves prennent conscience que leurs connaissances (c'est-à- dire le cours) appliquées à la situation de l'exercice, les amènent à des informations nouvelles, informations qui n'étaient pas explicites dans l'énoncé (niveau 2).

A propos des démonstrations utilisant parallèles et perpendiculaires, le jeu dans les exercices consiste à associer la bonne phrase de cours aux gestes que l'on a fait en respectant l'énoncé. Si l'on utilise deux fois son équerre en la faisant glisser sur la même droite, on illustre la phrase : « Si deux droites .... ».

On est alors « sûr » que deux droites de la figure sont parallèles même si le tracé est maladroit.

Autant que possible dans les contrôles, j'essaie de distinguer les exercices qui relèvent de la maîtrise des outils de dessins (précision du tracé, choix du bon outil, organisation pertinente dans la construction, etc.), de ceux qui témoignent du passage d'un niveau de van Hiele à un autre (identification des figures, analyse de leurs propriétés, premières déductions).

En 5ème, le parallélogramme est une figure souvent peu connue des élèves; je considère donc qu'ils l'abordent au niveau de base. Vient ensuite la liste de ses propriétés que l'on met en ordre en fin d'année pour rédiger quelques démonstrations. La liste des propriétés permet de faire des constructions dans lesquelles un raisonnement s'impose sans pour autant qu'il soit demandé de le rédiger. La somme des angles d'un triangle et la symétrie centrale sont utilisées de la même manière. Par exemple (voir page suivante)

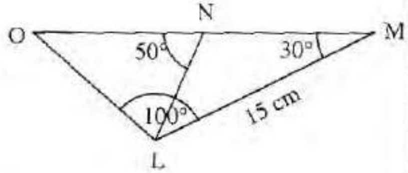
OLM est un triangle. Le point N appartient au segment [OM].

De plus, $\widehat{ONL} = 50°$; $\widehat{OLM} = 100°$ *et LM = 15 cm.*

La figure ci-contre est mal construite : elle ne correspond pas aux données.

Construis une figure respectant cet énoncé.

Explique ta méthode.



Cet exercice a fait l'objet d'une étude et d'une publication dans *Repères* n°12 (juillet 1993)

Dans mes classes de 5ème, certains élèves ont su faire la figure alors que la rédaction de leur raisonnement a été très médiocre. La correction a alors été une phase d'apprentissage de rédaction en Français. Ceux qui avaient essayé de placer le point *N* en faisant glisser leur rapporteur sur le segment [*OM*] savaient que leur technique n'était pas très performante; lors de la correction, ils ont accepté les « Forcément, on a ceci ; Obligatoirement il y a cela.... » de leurs camarades comme autant d'outils plus puissants que le glissement du rapporteur. Pour chacun de ces adverbes, j'ai demandé à l'élève qui l'avait prononcé d'expliquer son utilisation. La réponse a toujours été la même : « Dans le cours on a écrit que .... . Donc on est sûr que ... ». Il est vrai que le passage à l'écrit d'un tel raisonnement n'est pas simple, les élèves n'utilisent pas spontanément le raisonnement hypothético-déductif. Ce qui est alors essentiel pour moi est le fait qu'ils utilisent les bons théorèmes au bon moment dans leur raisonnement et que les connecteurs logiques soient employés avec pertinence. Il est manifeste que les élèves les plus avancés peuvent, dès qu'il ont compris qu'il fallait toujours commencer par rappeler les hypothèses, rédiger de véritables démonstrations.

Ni en 6ème ni en 5ème je n'utilise les mots « définition » et « théorème ». Tout est « phrase de cours », et elles sont toutes présentées sous forme anonyme (sans nom de point ou de sommet), et à l'aide de « si ....alors .... ». Les élèves les plus avancés de 5ème distinguent vite les définitions des propriétés parmi ces phrases; ils sont bien évidemment autorisés à utiliser un tel vocabulaire.

En 4ème, la situation est, on le sait, beaucoup plus complexe selon le niveau des élèves ou plus exactement selon les niveaux de van Hiele qu'ils ont atteints. Il est clair que la manipulation du cosinus ou du théorème de Pythagore relèvent du niveau 3 de van Hiele alors que certains élèves ne maîtrisent pas vraiment le niveau 1. Que faire ? Donner suffisamment d'activités et d'exercices de niveaux 1 et 2 pour permettre de rattraper ces manques et éviter que ces élèves ne soient amenés à sauter le niveau 1 ou le niveau 2, ce qui les conduirait inévitablement dans une impasse. Un travail de « révisions » des connaissances relatives au programme de 5ème s'impose bien souvent. C'est l'occasion de proposer des exercices de tous niveaux (niveau 0, 1 ou 2) pour cerner l'état des connaissances des élèves. Les projections, sujet nouveau pour tous les élèves, sont aussi l'occasion de parcourir les différents niveaux de van Hiele : depuis les premiers exercices de dessin en passant par des constructions plus élaborées, l'analyse de certaines figures et l'étude de propriétés (certaines étant admises, d'autres étant démontrées), on peut mettre en place le rôle d'un théorème ou d'un axiome.

IV. Conclusion

La théorie initiée par P.M. van Hiele n'est sans doute pas un remède miracle à l'enseignement de la démonstration mais elle est pour moi une grille de référence très simple à utiliser au quotidien. Elle me permet en effet d'organiser mes progressions, les activités à faire en classe, les exercices à donner à la maison ou de prévoir mes contrôles en sachant quelle réussite je peux en attendre. Elle m'a permis de comprendre pourquoi certains élèves peuvent faire des démonstrations en 6ème alors que d'autres, en 4ème, en sont incapables. Une étude plus approfondie des niveaux d'analyse et de déduction informelle m'a amené à inventer des exercices qui favorisent, je pense, le passage d'un niveau à l'autre en particulier en 6ème et en 5ème. Certains nouveaux manuels de 6ème proposent maintenant des exercices relevant des niveaux 1 et 2 comme les constructions de figures à partir de schémas faits à main levée, ou la description de construction de figures. Surtout elle m'a permis de concevoir des contrôles où chaque élève a la possibilité de produire quelque chose que je suis en mesure d'apprécier et qui me guide dans ma progression.

Références bibliographiques

[1] BRACONNE A. : « *Compréhension de la démonstration en géométrie chez les professeurs et les élèves au secondaire* », Université Laval, Québec, 1988

[2] van HIELE - GELDOF D. : « *The didactics of geometry in the lowest class of the secondary school* ». English summary. Doctoral dissertation, Université d'Utrecht, 1957

van HIELE P.M. : « *La discussion et la langue* », exposé non publié, Sherbrooke, 1981.

[3] USISKIN Z. : « *Van Hiel levels and achievement in secondary school geometry* », CDASSG Project, 1982, SE 038 813.

[4] HOFFER A. : « *Geometry is more than proof* », Mathematics Teacher, 1981, 74, pp. 11 -18.

[5] WIRSZUP I : « *Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry* », Space and Geometry, ERIC/SMEAC, 1976.

[6] van HIELE P.M. : « *La pensé de l'enfant et la géométrie* », Bulletin de l'APMEP, 1959, 198, pp. 199-205.

[7] GRAS R : « *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et certains objectifs didactiques en mathématiques* » thèse d'Etat Rennes, 1979

[8] GRAS R. : « *Taxonomie d'objectifs cognitifs* » in EVAPM 6ème Fascicule 1 (Dossier professeurs), 1997.