Olympiades

Les problèmes d'Olympiades et leurs solutions tiendront aujourd'hui lieu de Rubrique " Problèmes " que vous retrouverez, comme d'habitude, dans le prochain numéro du Bulletin.

Introduction

Le concours général est-il le bon critère pour sélectionner nos candidats aux Olympiades Internationales de Mathématiques ? Après la 38ème Olympiade qui s'est tenue à Mar des Plata, en Argentine, les 24 et 25 juillet 1997, la question se pose d'autant plus que notre premier prix du concours général, élève de Janson de Sailly (Paris XVI°), n'a su faire en entier aucun des six problèmes proposés. C'est finalement un élève de première, Joseph NAJNUDEL, remarqué grâce à ses excellents résultats à Kangourou, qui a sauvé l'honneur en ramenant notre seule médaille d'or (39/42, 11°/453 candidats), nos autres candidats étant trois accessits de Concours Général et un autre élève de première.

Les mauvaises performances de la France (cette année 31ème sur 82 pays) sont préoccupantes, et l'Inspection Générale rappelle que toute participation à une entreprise, quelle qu'elle soit, nécessite un minimum de solidité d'organisation dans la préparation. Alors que le nombre de pays participants ne cesse de croître et que le centenaire des Jeux Olympiques nous a remis en mémoire la devise de Pierre de Coubertin, qu'en est-il de la place de la France ?

C'est dans ce contexte que Martin ANDLER, vice-président de la Société Mathématique de France, a réuni le 5 décembre dernier un certain nombre de personnes et d'organisations concernées par les activités mathématiques parascolaires et la préparation aux Olympiades : j'ai participé, à titre personnel, à cette réunion. Son idée est de fonder une Association qui coordonne ces activités parascolaires en apportant aux clubs un soutien moral et logistique (compilation de problèmes, site Web, kits d'animation de clubs, tournées de conférences,...) et permette de préparer plusieurs années à l'avance nos futurs candidats aux Olympiades. Car les problèmes d'Olympiades sont une gymnastique très différente de notre enseignement habituel*, et ce ne sont pas deux ou trois semaines de stage intensif, prises en sandwich entre la

---

* l'A.P.M.E.P. s'est toujours montrée soucieuse de développer la diversification des compétences. Elle le traduit une fois de plus dans les faits, avec le travail du groupe "Prospective Bac", pour une rénovation des sujets du baccalauréat.

publication des résultats du Concours Général et le départ vers l'Olympe qui suffisent à combler les lacunes de nos lycéens. D'ailleurs l'idée d'un concours général en première a plus d'une fois été évoquée au cours de la réunion du 5 décembre, mais aucune réponse n'a été avancée.

Malgré quelques réticences (est-ce le bon moment, à la veille du Colloque National sur les Lycées, pour démarrer une telle action ? n'existe-t-il pas déjà suffisamment d'Associations ?...) les participants à cette réunion étaient globalement favorables à l'idée, il est donc vraisemblable que l'Association verra le jour, et l'A.P.M.E.P. sera concernée au premier chef : de nouveaux rendez-vous ont été pris pour janvier 1998. Plusieurs points d'accord se sont dégagés de notre première réunion : l'Association doit être en contact direct avec la réalité lycéenne, elle doit prendre en compte les nombreuses initiatives existant dans ce domaine, et les coordonner, sans les concurrencer : la plupart des rallyes mathématiques se sont déjà regroupés en une association CIJM. Le Ministère devra évidemment participer au financement, tant pour les heures de décharge que pour la fabrication des documents ou la mise en place d'un site Web, ce qui n'exclut pas a priori d'autres sources de financement, mais l'idée de faire payer des cotisations aux élèves n'a pas séduit l'Inspection Générale. Enfin et surtout, l'Association devra dissocier ses deux objectifs, d'une part promouvoir les mathématiques attrayantes au sein de Clubs non élitistes, d'autre part constituer et préparer suffisamment à l'avance une Equipe Nationale pour nous représenter aux Olympiades.

Les Roumains qui sont à l'origine des Olympiades Internationales de Mathématiques et qui, en développant ce genre de compétition tout au long de la scolarité, se classent régulièrement parmi les dix meilleurs pays, sont tout prêts à nous aider dans notre préparation aux Olympiades, et d'ailleurs, un chercheur Roumain de Besançon a d'ores et déjà entrepris de préparer pour les Olympiades 1998 l'autre élève de première que nous avons présenté en 1997, Raphaël Cote : avec Joseph Najnudel, cela fera au moins deux candidats correctement préparés, et les 2000 candidats au Concours Général recevront une plaquette d'information sur les Olympiades leur suggérant de s'auto préparer.

Mais pour les années ultérieures, plusieurs idées ont été évoquées : une stimulation à ce genre d'épreuve par l'organisation de compétitions inter-établissements. Une forme de tutorat (lycéens pris en charge par des élèves d'E.N.S. par exemple) plutôt que de clubs dans la mesure où les élèves de très bon niveau sont sans doute trop dispersés dans toute la France pour se constituer en clubs. D'ailleurs, tout est en place pour que ce tutorat démarre dès aujourd'hui...

Signalons, par ailleurs, la participation à notre réunion de l'association « Femmes et Mathématiques » : est-ce une fatalité que nous ne présentions pas de filles aux Olympiades Internationales de Mathématiques ? La Croatie, par exemple, présente des filles, ce qui ne l'empêche pas de progresser rapidement : depuis 1996, elle est meilleure que la France ! Les différences de performances entre filles et garçons sont sensibles, surtout à partir de la seconde, et on peut chercher à y remédier tant par le mode de constitution et d'encadrement des clubs mathématiques que par le contenu des activités mathématiques proposées.

Pour en revenir aux Olympiades, Marie-Laure Chaillout m'écrit : « *le niveau des Olympiades doit baisser, c'est bien la première fois que j'arrive à faire tous les exercices* ». Au vu des statistiques, à moins que le niveau des candidats n'ait baissé à l'échelle mondiale, cette Olympiade était plus difficile que celle de Toronto (1995) et, a fortiori, que celle de Hong Kong (1994), et l'énoncé 6 de 1997 était, après l'énoncé 5 de 1996, le plus difficile de ces huit dernières années, bien que certains des 26 énoncés présélectionnés - parmi lesquels le jury a choisi les 6 énoncés de cette année - m'aient semblés plus délicats : le 23 (ABCD est un quadrilatère convexe dont les diagonales AC et BD se coupent en O, montrer que si $OA.\sin A + OC.\sin C = OB.\sin B + OD.\sin D$, le quadrilatère est inscriptible), le 15 (une progression arithmétique infinie d'entiers positifs contient un carré et un cube, montrer qu'elle contient une puissance sixième)... Peut-on résoudre le 11 (soit $P(x)$ un polynôme à coefficients réels tel que $P(x)>0$ pour tout $x \geq 0$, montrer qu'il existe un entier positif n tel que $(1 + x)^n P(x)$ soit un polynôme à coefficients positifs ou nuls) sans faire appel au Théorème Fondamental de l'Algèbre ? C'est l'entraînement qui rend cette Olympiade plus facile, et l'entraînement, c'est précisément ce qui manque à nos candidats...

En conclusion, voici le tableau équivalent à celui publié les années passées, donnant pour chaque problème, pour tous les candidats et pour les candidats français, la moyenne, le nombre de notes maximales (7/7) et le nombre de zéros. La France se situe quand même un peu au-dessus de la moyenne mondiale, ce qui n'était pas le cas l'an passé.

	INTERNATIONAL			FRANCE		
	7/7	0/7	moyenne	7/7	0/7	moyenne
1	10%	20%	2,4	0/6	2/6	2,3
2	52%	36%	3,9	2/6	1/6	3,5
3	19%	59%	1,8	1/6	3/6	2,5
4	30%	18%	3,8	2/6	0/6	4,2
5	32%	30%	3,3	3/6	2/6	3,8
6	2%	73%	0,8	1/6	5/6	1,2

16,0 17,5

	1997	1996	1995
Médaille d'or	35/42 (39 cand.)	28/42 (35)	37/42 (30)
dont score maximum	*42/42 (4 cand.)*	*(1)*	*(14)*
Médaille d'argent	25/42 (70 cand.)	20/42 (66)	29/42 (71)
Médaille de bronze	15/42 (122 cand)	12/42 (99)	19/42 (100)

CORRECTION DES ENONCÉS

ENONCÉ N°1

Dans le plan, les points à coordonnées entières sont les sommets de carrés unités. Les carrés sont coloriés alternativement en blanc et en noir (comme sur un échiquier).

Pour tout couple d'entiers strictement positifs m et n, on considère un triangle rectangle dont les sommets sont des points à coordonnées entières et dont les côtés de l'angle droit, de longueur m et n, suivent les côtés des carrés.

Soit S_1 l'aire totale de la partie noire du triangle et S_2 l'aire totale de sa partie blanche. On pose :

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|$$

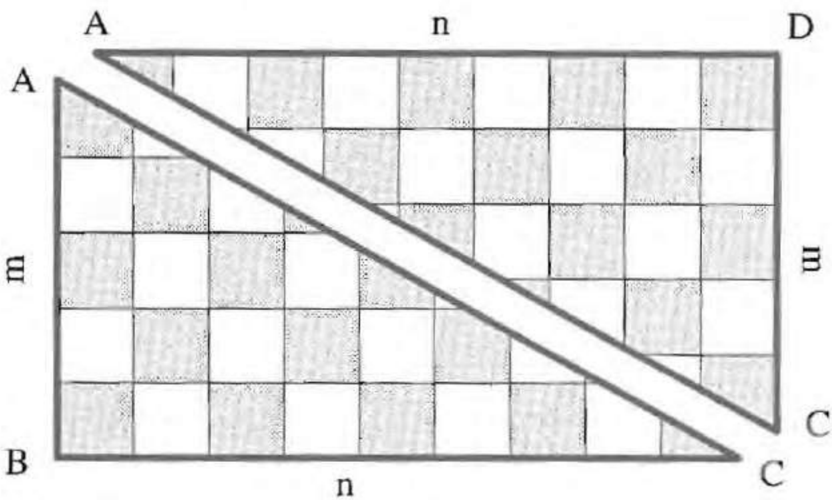
(a) Calculer $f(m, n)$ pour tous les entiers strictement positifs m et n qui sont tous deux pairs ou tous deux impairs.

(b) Montrer que pour tout m et n, $f(m, n) \leq 1/2 \operatorname{Max}(m, n)$.

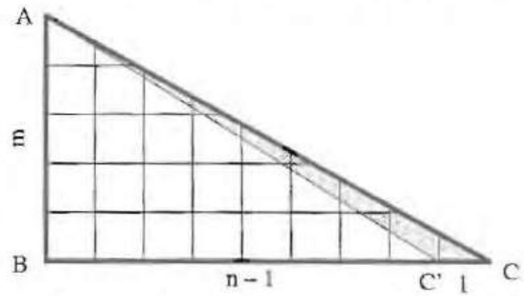
(c) Montrer qu'il n'existe pas de constante C telle que, pour tout m et n, $f(m, n) \leq C$.

SOLUTION

Il existe deux manières de colorier les cases d'un tel triangle, et la valeur absolue est indispensable pour que cette fonction $|S_1 - S_2|$ prenne la même valeur pour deux triangles de même dimension, donc puisse être écrite $f(m\ ,n)$. On supposera désormais que le triangle ABC a une case noire au sommet B de l'angle droit, avec AB = m et BC = n.



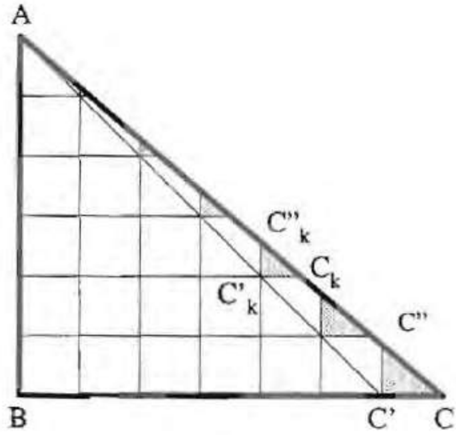
(**a**) Par symétrie, il est clair que si m et n sont tous deux pairs ou tous deux impairs, les deux demi-rectangles ABC et ADC ont même surface noire S_1 et même surface blanche S_2 - ce ne serait pas le cas si m et n étaient de parité contraire : la case en D ne serait pas de même couleur que la case en B -. Dans le rectangle ABCD, la surface noire moins la surface blanche, $2(S_1 - S_2)$, vaut 0 si m et n sont tous deux pairs et 1 si m et n sont tous deux impairs. Donc $f(m\ ,n)$ vaut 0 si m et n sont tous deux pairs et 1/2 si m et n sont tous deux impairs.



(**b**) La relation étant évidente, d'après le (**a**), si m et n sont de même parité, supposons m pair et n impair (m et n jouent des rôles symétriques), et plaçons C' sur [BC] tel que BC' = n – 1.

Le triangle ABC', de côtés m et n – 1 pairs, a une surface blanche égale à sa surface noire. La différence entre la surface noire et la surface blanche de ACC' est au plus égale à la surface totale de ACC', soit $1/2\text{m} \leqslant 1/2\ \text{Max}(\text{m}, \text{n})$. D'où le résultat.

La démonstration ci-dessus permet même d'affirmer : $f(\text{m}, \text{n})$ est majoré par la moitié de la dimension paire du triangle rectangle, ou encore par $1/2 + 1/2\,\text{Min}(\text{m}, \text{n})$.



(c) C'est pour $|\text{m} - \text{n}| = 1$ que la fonction $f(\text{m}, \text{n})$ prend les plus grandes valeurs, et nous allons prouver que $f(\text{n} - 1, \text{n})$ est non borné. En tout état de cause, c'est un des rares cas où la fonction est aisément calculable.

Supposons $\text{m} = 2\text{q}$ et $\text{n} = 2\text{q} + 1$. Dans le triangle ABC', de côté 2q, la surface noire est égale à la surface blanche. Dans le triangle ACC', la surface noire est une réunion de 2q triangles $C_kC'_kC''_k$ homothétiques de CC'C'' dans l'homothétie de centre A et de rapport k/2q, qui transforme C' en C'_k. La surface noire vaut donc :

$$(\text{surface CC'C''}) \times \sum_{k=1}^{2q}\left(\frac{k}{2q}\right)^2 = \frac{1}{4q(2q+1)}\sum_{k=1}^{2q} k^2$$

Si l'on ne connaît pas par cœur la somme des 2q premiers carrés, on peut écrire :

$$k^2 = 2\left(\frac{k(k-1)}{2}\right) + k \qquad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{2q} k^2 = 2\sum_{k=1}^{2q}\left(C^3_{k+1} - C^3_k\right) + \sum_{k=1}^{2q}\left(C^2_{k+1} - C^2_k\right)$$

$$= 2\,C^3_{2q+1} + C^2_{2q+1} = \frac{2q(2q+1)(4q+1)}{6}$$

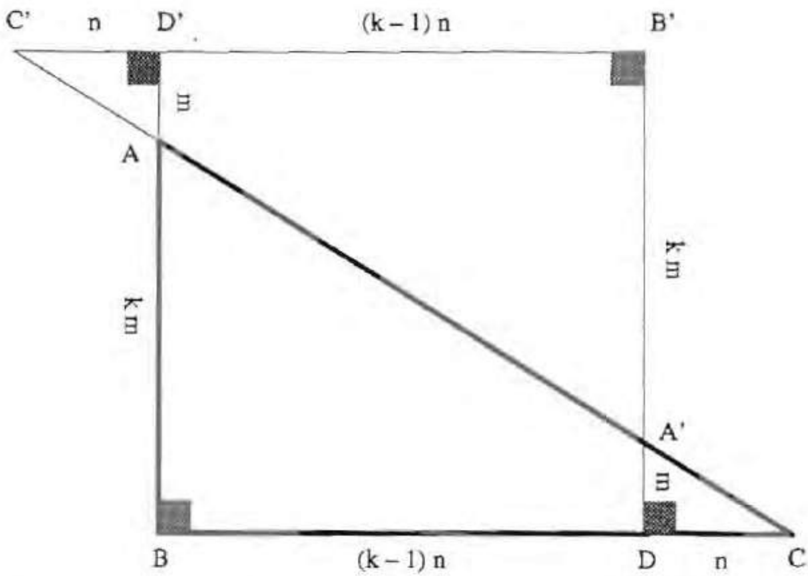
La surface noire du triangle ACC' vaut donc $\frac{4q+1}{12}$, et comme la surface totale de ACC' vaut q, la surface blanche vaut $\frac{8q-1}{12}$ et la différence entre la surface noire et la surface blanche de ACC' (donc également de (ABC) vaut $\frac{2q-1}{6} = f(2q, 2q+1)$, qui n'est majoré par aucune constante C.

REMARQUES

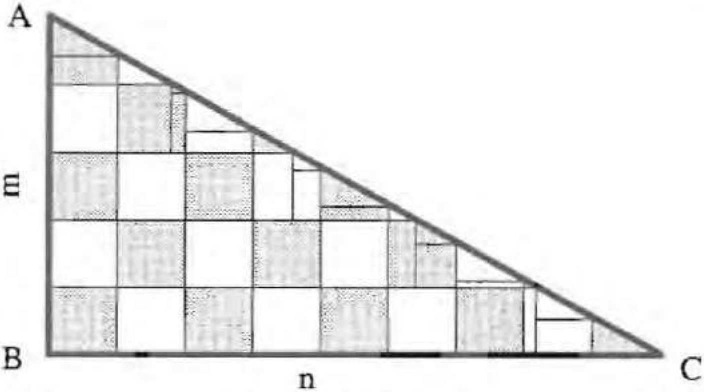
Etonnante fonction, qui sous une définition aussi anodine dissimule une telle complexité et une telle richesse de propriétés remarquables! Le présent énoncé ne fait qu'effleurer l'étude de cette fonction, et Mohammed AASSILA (67 - Strasbourg), Jacques BOUTELOUP (76 - Rouen) et Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles) ont consciencieusement traité les trois questions posées. Mais Roger CUCULIÈRE (92 - Clichy) m'a incité, fin Août, à approfondir l'étude de cette fonction, et plusieurs lettres d'Hubert DELANGE (91 - Bures sur Yvette) ont complété mon trtavail.

En résumé, on peut établir les propriétés suivantes :

① Si k est impair, $f(km , kn) = f(m , n)$. Pour tout polygone P notons $\delta(P)$ = (surface noire de P) – (surface blanche de P). Sur la figure 4, les cases B et B' étant de même couleur, $\delta(ABC) = \delta(A'B'C')$ donc $2\delta(ABC) = \delta(BDB'D') + 2\delta(A'DC) = \pm 2f(m , n)$.
Il en résulte que si m et n ne sont pas tous deux pairs, $f(m , n)$ ne dépend que du rationnel m/n.



② Si m et n ne sont pas tous deux impairs, mn $f(m , n)$ est entier. En effet, la surface noire de ABC est, tout comme la surface blanche, une réunion de rectangles et de triangles rectangles dont le côté vertical est multiple de 1/n et le côté horizontal de 1/m, car les intersections de l'hypoténuse [AC] avec les côtés des cases ont toutes une abscisse multiple de 1/m et une ordonnée multiple de 1/n.



La surface d'un tel rectangle est multiple de 1/mn, mais la surface d'un tel triangle est multiple de 1/(2mn), ce qui explique que le résultat soit faux si m et n sont tous deux impairs. Ces triangles se suivent le long de l'hypoténuse [AC], ils ont pour côtés de l'angle droit k/m et k/n et pour hypoténuse k/(mn) × AC. La somme des k est donc égale à mn, elle est paire si m et n sont de parités distinctes, tout comme la somme des $\pm k^2$, d'où le résultat.

Pour ce qui est du calcul effectif de $f(m\,,\,n)$, hormis le cas $m = n - 1$ ci-dessus étudié et quelques cas triviaux comme :

$f(1\,,\,n) = 1/2$ pour tout n

$f(2\,,\,n) = 1/(2n)$ pour tout n impair

ce calcul est généralement très difficile! Rien que pour atteindre les trois résultats :

• $f(3\,,\,n) = \left|\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\,\frac{\varepsilon_n}{n}\right|$ pour n pair, avec $\varepsilon_n = 1, -1$ ou 0 suivant que $n \equiv 1$, -1 ou 0 (mod.3)

• $f(3n - 1\,,\,n) = \dfrac{n^2 - 1}{6\,(3n-1)}$ si n pair

$$f(3n - 1\,,\,n) = \left|\frac{n^2 - 1}{6\,(3n-1)} - \frac{1}{2}\right| \text{ si n impair}$$

• $f(n-3\,,\,n) = \dfrac{2n-3}{36} + \dfrac{(-1)^n}{4} + \dfrac{4}{9}\dfrac{\varepsilon_n}{n(n-3)}$ si $n \geqslant 4$ avec, là encore, $\varepsilon_n = 1, -1$ ou 0 suivant que $n \equiv 1, -1$ ou 0 (mod.3)

… les calculs n'ont rien d'élémentaire!

Hubert DELANGE démontre la formule suivante :

$$f(m\,,\,n) = \left| \frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right] + \frac{n}{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k F\left(\frac{km}{n}\right)\right|$$

(en notant $\left[\frac{n}{2}\right]$ la partie entière de $n/2$: $\frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]$ vaut 0 si n est pair et 1/2 si n est impair), F étant la fonction définie par :

$\forall t \in [0\,,\,1],\ F(t) = t - t^2$

$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t+1) = -F(t)$.

Son raisonnement consiste à calculer :

$$S_1 - S_2 = \int_0^n (l_1(x) - l_2(x))\,dx$$

$l_1(x)$ et $l_2(x)$ étant la somme des longueurs des segments noirs (resp. blancs) formés de points d'abscisse x du triangle. Si l'on appelle g la fonction périodique, de période 2, définie par :

$g(y) = y$ si $0 \leqslant y \leqslant 1$

$g(y) = 2 - y$ si $1 \leqslant y \leqslant 2$

on obtient :
$$S_1 - S_2 = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_k^{k+1} g\left(m - \frac{mx}{n}\right)dx$$

$$S_1 - S_2 = (-1)^{n+1}\frac{n}{m}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_{km/n}^{(k+1)m/n} g(u)\,du$$

d'où la formule annoncée dans la mesure où $F(t) = \int_0^t (1 - 2g(u))\,du$

Cette formule fournit une bonne majoration de $f(m\,,\,n)$, lorsque m est premier avec n :

$f(m\,,\,n) \leqslant \dfrac{n^2-1}{6m}$ si n est pair

$f(m\,,\,n) \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{n^2-1}{6m}$ si n est impair.

(majoration d'autant meilleure si l'on suppose $n < m$).

En effet, les $\left|F\left(\frac{km}{n}\right)\right|$ prennent alors, dans le désordre, toutes les valeurs F(k'/n) pour $0 < k' \leqslant n$, donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k F\left(\frac{km}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k'=1}^{n} F\left(\frac{k'}{n}\right) = \frac{n^2-1}{6n}$$

J'avais moi-même, par une méthode plus triangulatoire, établi cette même formule dans le cas où m > n, et j'en avais trouvé une autre du même genre lorsque m < n, mais j'avais réuni les deux en développant la fonction périodique en série de Fourier et en intervertissant les sommations pour aboutir, dans les deux cas, mais lorsque m et n sont de parités distinctes, à :

$$f(m\,,\,n) = \left|\left[\frac{n}{2}\right] - \frac{n}{2} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{n}{m} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{\tan\,(2q+1)\,\frac{m\pi}{2n}}{(2q+1)^3}\right|$$

Ces deux relations équivalentes nous amènent à poser, lorsque m et n sont de parités contraires :

$$S\left(\frac{m}{n}\right) = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k F\left(\frac{km}{n}\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{n} \frac{\tan\,(2q+1)\,\frac{m\pi}{2n}}{(2q+1)^3}$$

On peut calculer $f(m\,,\,n)$ en fonction de S (m/n), et comme S est manifestement impaire et périodique de période 2, il suffit, par exemple, de connaître S (2/3) pour calculer $f(m\,,\,3)$ pour tout n pair. Mais le problème est qu'à cause de la valeur absolue, il n'est pas possible, dans le cas général, de calculer S(m/n) à partir de $f(m\,,\,n)$. Or, pour calculer, par exemple, $f(3n-1\,,\,n)$ à partir de $f(n-1\,,\,n)$ en utilisant la périodicité de S, il faut pouvoir, au moins dans ce cas particulier, calculer S à partir de f.

De fait, si $n - \sqrt{n} + 1 \leqslant m < n$, avec $n \geqslant 7$, on peut affirmer que $S(m/n) > 1/2$, et donc que :

$$f(m\,,\,n) = \frac{n}{m}\,S\left(\frac{m}{n}\right) \qquad \text{si n est pair}$$

$$f(m\,,\,n) = \frac{n}{m}\,S\left(\frac{m}{n}\right) - \frac{1}{2} \qquad \text{si n est impair}$$

car c'est seulement pour $2q+1 > \frac{n}{n-m} > \sqrt{n} + 1$ que $\tan(2q+1)\,\frac{m\pi}{2n}$ peut être négatif : la somme des termes qui précèdent est minorée par le premier terme $\tan\frac{m\pi}{2n} > \frac{2n}{(n-m)\pi} - \frac{2(n-m)}{n\pi}$ et pour le reste, on utilise le fait que pour tout q,

$$\left|\tan\,(2\,q+1)\frac{m\,\pi}{2\,n}\right| \leq \tan\frac{(n-1)\,\pi}{2\,n} < \frac{2\,n}{\pi}$$

ainsi que :

$$\sum_{q>X}\frac{1}{(2\,q+1)^3} < \frac{1}{16\,X^2} \quad \forall X>0$$

Dans l'hypothèse, donc, où $p \leqslant \sqrt{n}-1$ et où $n \geqslant 7$, on a :

$$n(n-p)\,f(n-p\,,\,n) = n^2 S\left(1-\frac{p}{n}\right) \qquad \text{si n est pair}$$

$$= n^2 S\left(1-\frac{p}{n}\right) - \frac{n\,(n-p)}{2} \qquad \text{si n est impair.}$$

Comme $S\left(1+\frac{p}{n}\right) = -\ S\left(1-\frac{p}{n}\right)$, compte tenu de la valeur absolue,

$$(n+p)\,nf(n\,,\,n+p) = n\,(n-p)f\,(n-p\,,\,n) \qquad \text{si n est pair}$$

$$= n\,(n-p)f\,(n-p\,,\,n) + n^2 \qquad \text{si n est impair.}$$

Il existe une fonction simple vérifiant ces mêmes relations :

$$\varphi(m\,,\,n) = \frac{n\,m\,(2\,n-m)}{6\,(n-m)} \qquad \text{si n est pair,}$$

$$= \frac{n\,m\,(2\,m-n)}{6\,(n-m)} \qquad \text{si n est impair}$$

donc les deux fonctions diffèrent d'une troisième fonction vérifiant :
$h(n-p\,,\,n) = h(n+jp\,,\,n+(j+1)p)$ pour tout entier $j \geqslant 0$. Pour $j \to +\infty$, en écrivant :

$$\text{cotan}\,(2\,q+1)\,x = \frac{1}{(2\,q+1)\,x} - \frac{(2\,q+1)\,x}{3} + ((2\,q+1)\,x)^3\,\theta\,((2\,q+1)\,x)$$

si $(2q+1)x \in\ ]0\,,\,\pi/2]$

$$\text{cotan}\,(2\,q+1)\,x = \frac{((2\,q+1)\,x)^3}{(k\,\pi)^3((2\,q+1)x-k\,\pi)} + ((2\,q+1)\,x)^3\,\theta\,((2\,q+1)\,x)$$

si $(2q+1)x \in\ ]k\pi-\pi/2\,,\,k\pi+\pi/2]$, et en utilisant le développement Eulérien de $\tan x$, j'obtiens finalement :

$$h(n+(j-1)p\,,\,n+(j+1)p) = \frac{2\,p^2}{\pi}\,C + \frac{p^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\tan\left(\frac{kn\pi}{p}\right)}{k^3} + O\,(1/j).$$

Le O(1/j) est nul car la fonction est indépendante de j, et la constante

$C = -\frac{4}{3\pi^3} + \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \theta(t)\,dt$ est également nulle car, pour $p = 1$, la fonction h s'annule. On arrive donc à la formule suivante :

Si $n - \sqrt{n} + 1 \leqslant m < n$ avec $n \geqslant 7$,

$$f(m\,,n) = \left| \frac{n+m}{12\,(n-m)} + \frac{(-1)^n}{4} + \frac{(n-m)^2}{n\,m\,\pi^3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\tan\left(\frac{k\,n\,\pi}{n-m}\right)}{k^3} \right|$$

Il est vraisemblable que cette formule est valable quels que soient n et m, mais je n'ai pas terminé la démonstration. Et cela ne clôt pas l'étude de la fonction f ! Indépendamment de ces développements en série, rien n'interdit de se poser des questions "tordues" du type : $f(m\,,n)$ peut-il être nul sans que m et n soient tous les deux pairs?

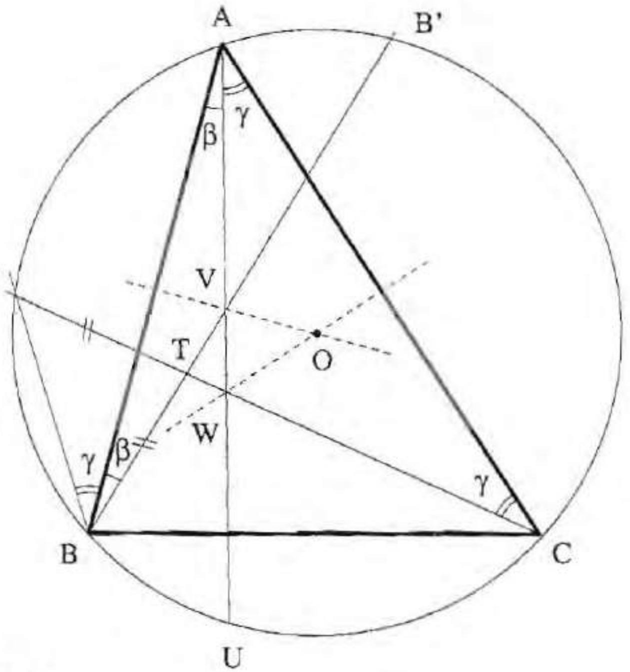
ÉNONCÉ 2

L'angle A est le plus petit dans le triangle ABC. Les points B et C divisent le cercle circonscrit au triangle en deux arcs. Soit U un point intérieur à l'arc limité par B et C qui ne contient pas A.
Les médiatrices des segments [AB] et [AC] rencontrent la droite (AU) respectivement en V et W. Les droites (BV) et (CW) se coupent au point T.
Montrer que AU = TB + TC.

SOLUTION

Appelons $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les angles du triangle, β et γ les angles $\widehat{BAU}$ et $\widehat{UAC}$ respectivement. Comme $\beta < \widehat{A} \leqslant \widehat{B}$ et $\gamma < \widehat{A} \leqslant \widehat{C}$, T est intérieur au triangle ABC.

Les droites (BT) et (CT) recoupent le cercle en B' et C' respectivement. La symétrie par rapport à la médiatrice de [AC] transforme le cercle en lui-même et (AW) et (CW), donc U en C'. Il en résulte : AU = CC'. Or, l'angle $\widehat{TBC'}$ est égal à $\beta + \gamma = \widehat{A}$, donc à l'angle $\widehat{BC'C}$; le triangle TBC' est isocèle, et AU = TC + TC' = TC + TB.



REMARQUES

J'ai reçu plusieurs solutions à cet énoncé : Mohammed AASSILA (67 - Strasbourg), Jacques BOUTELOUP (76 - Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Charles NOTARI (31 - Montaut) et Raymond RAYNAUD (04 - Digne), qui presque tous utilisent à peu de choses près la méthode ci-dessus. Seuls Charles NOTARI et moi-même avons d'abord pensé à une solution trigonométrique : si l'on appelle φ l'angle $\widehat{ABU}$, $\widehat{TBC} = \varphi - \widehat{A}$ et $\widehat{TCB} = \pi - \varphi - \widehat{A}$ donc $\widehat{BTC} = 2\widehat{A}$, ce qui entraîne :

$$\frac{TB}{BC} + \frac{TC}{BC} = \frac{\sin\left(\varphi + \widehat{A}\right)}{\sin 2\widehat{A}} + \frac{\sin\left(\varphi - \widehat{A}\right)}{\sin 2\widehat{A}} = \frac{\sin\varphi}{\sin\widehat{A}} = \frac{AU}{BC}$$

On remarque au passage que B, C, O, T sont cocycliques.

Mais ce qui retient davantage mon attention, c'est la formulation initiale de l'énoncé, dans la liste des 26 énoncés présélectionnés dont on a extrait les 6 énoncés proposés :

« On choisit sur un cercle (Γ) quatre points distincts A, B, C, D de sorte que le triangle BCD ne soit pas rectangle.

Montrer que :
(a) Les médiatrices de [AB] et [AC] coupent la droite (AD) en des points W et V respectivement, et que les droites (CV) et (BW) se coupent en un point T.
(b) La longueur de l'un des segments [AD], [BT] et [CT] est la somme des longueurs des deux autres. »

Outre le changement de notations, on remarquera que le problème a été sensiblement réduit, soit parce que le niveau de la présélection a été jugé élevé, soit parce qu'en règle générale, le jury évite que la difficulté d'un problème soit lié à la multiplicité des cas de figures. Il est d'ailleurs plus facile de corriger 450 copies en quelques jours si tout le monde a fait à peu de choses près la même figure.

Dans la première question de cet énoncé initial se cachait l'astuce que si le triangle BCD n'est pas rectangle, les points B et D n'étant pas diamétralement opposés, (AD) ne peut pas être parallèle à la médiatrice de [AB]. Elle n'est pas non plus parallèle à la médiatrice de [AC], et pour que (CV) et (BW) soient parallèles, il faudrait que $\widehat{BAC}$ soit droit, donc également $\widehat{BDC}$.

Quant à la seconde, c'est Raymond RAYNAUD qui nous suggère la méthode évitant d'envisager plusieurs cas de figure. Il utilise un résultat qu'il faut peut-être redémontrer : deux cordes d'un même cercle ont même longueur si et seulement si elles sont symétriques par rapport à un diamètre. Dans un sens, c'est évident, dans l'autre on peut dire que si deux cordes, de milieux M et N ont même longueur, le triangle OMN est isocèle, et la symétrie par rapport à l'axe de ce triangle transforme l'une des cordes en l'autres.

Or, quel que soit le cas de figure, si (BT) et (CT) recoupent le cercle en B' et C' respectivement, par hypothèse [BB'] est symétrique de [AD] par rapport à la médiatrice de [AB] et [CC'] symétrique de [AD] par rapport à la médiatrice de [AC], donc BB' = AD = CC', donc [BB'] est symétrique de [CC'] par rapport à un diamètre, en l'occurrence (OT). Cette dernière symétrie transforme-t-elle B en C ou en C'?

La composée des symétries [BB'] $\mapsto$ [AD] $\mapsto$ [CC'] est une rotation transformant B en C et B' en C', donc la symétrie par rapport à (OT) transforme, elle, B en C' et C en B' : dans tous les cas de figure, AD = BB' et TC = TB', mais suivant que T est entre B et B' ou à l'extérieur, on aura soit TC = TB + AD, soit TC = TB – AD, soit TC = AD – TB, d'où le résultat de la seconde question.

ÉNONCÉ 3

Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ des réels vérifiant les conditions suivantes :

$|x_1 + x_2 + \ldots + | = 1$

$|x_i| \leqslant (n + 1)/2$ pour $i = 1, 2, \ldots n$.

Montrer qu'il existe une permutation $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ de $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ telle que :

$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \leqslant (n + 1)/2$.

SOLUTION

Appelons Y l'application qui à toute permutation σ de $\{1, 2, \ldots n\}$ associe :

$$Y(\sigma) = x_{\sigma(1)} + 2x_{\sigma(2)} + \ldots + nx_{\sigma(n)}$$

et τ la permutation qui à tout $k \in \{1, 2, \ldots n\}$, associe $n + 1 - k$.

Pour toute permutation σ, on a :

$$Y(\sigma) + Y(\sigma \circ \tau) = (x_{\sigma(1)} + 2x_{\sigma(2)} + \ldots + nx_{\sigma(n)}) + (x_{\sigma(n)} + \ldots + nx_{\sigma(1)})$$
$$= (n + 1)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \in \{-(n + 1), (n + 1)\}.$$

Donc, soit l'une au moins des deux valeurs $Y(\sigma)$ ou $Y(\sigma \circ \tau)$ appartient au segment $[-(n + 1)/2 , (n + 1)/2]$ et notre problème est résolu, soit ces valeurs sont situées de part et d'autre dudit segment. On peut donc supposer désormais que Y prend des valeurs strictement supérieures à $(n + 1)/2$ et des valeurs strictement inférieures à $-(n + 1)/2$.

Pour toute permutation σ ne vérifiant pas $x_{\sigma(1)} \geqslant x_{\sigma(2)} \geqslant \ldots \geqslant x_{\sigma(n)}$, il existe une permutation σ' telle que : $Y(\sigma) - (n + 1) \leqslant Y(\sigma') < Y(\sigma)$.
En effet, pour au moins une valeur de k, on a : $x_{\sigma(k)} < x_{\sigma(k+1)}$. Si l'on appelle ε_k la permutation qui échange k et k + 1, en laissant invariants les autres entiers, $Y(\sigma \circ \varepsilon_k) = Y(\sigma) + (x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k+1)})$, et comme tous les $|x_i|$ sont inférieurs ou égaux à $|(n + 1)/2|$, on a bien : $-(n + 1) \leqslant x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k+1)} < 0$.

Si les x_i ne sont pas tous distincts, il existe plusieurs permutations σ vérifiant : $x_{\sigma(1)} \geqslant x_{\sigma(2)} \geqslant \ldots \geqslant x_{\sigma(n)}$, mais le n-uplet de valeurs $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$, lui, est unique et le $Y(\sigma)$ correspondant également : c'est la valeur minimale prise par Y, car aucune autre valeur ne peut être minimale, elle est donc inférieure à $-(n + 1)/2$.

Parmi les permutations σ telles que $Y(\sigma) > (n + 1)/2$, il en existe au moins une, μ, telle que $Y(\mu)$ soit la plus petite valeur strictement supérieure à $(n + 1)/2$ prise par Y. Je peux donc trouver une permutation μ' telle que :

$$Y(\mu) - (n+1) \leqslant Y(\mu') < Y(\mu).$$

Etant donné la définition de μ, on a obligatoirement :

$$-(n+1)/2 < Y(\mu') \leqslant (n+1)/2$$

ce qui achève la démonstration.

REMARQUES

Si l'inégalité $|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leqslant (n+1)/2$ ne peut évidemment pas être améliorée, il suffit de choisir tous les x_i égaux à $1/n$ pour s'en convaincre, ce sont les hypothèses qui intriguent.

La première d'abord : puisqu'on ne change rien au problème en remplaçant tous les x_i par $-x_i$, pourquoi cette valeur absolue ? Ou plutôt, pourquoi cette égalité puisqu'on ne change rien à la démonstration en la remplaçant par une inégalité large ?

D'ailleurs, si $n = 4k + 2$ et si la moitié des x_i vaut $-a$, l'autre moitié valant a, comme $1 + 2 + \dots + n = (2k+1)(4k+1)$ est impair, $|y_1 + 2y_2 + \dots ny_n|$ est un multiple impair de a, et pour qu'il soit inférieur ou égal à $(n+1)/2$, il faut que a, donc $|x_i|$, soit lui aussi inférieur ou égal à $(n+1)/2$. Mais dans ce cas, la somme des x_i est nulle : si la somme des x_i est vraiment égale à 1, l'hypothèse $|x_i| \leqslant (n+1)/2$ peut sans doute être affaiblie. Par exemple, si $n = 2$ et si $x_1 + x_2 = 1$, il suffit donc que le plus petit des x_i soit compris entre $-5/2$ et $1/2$ (donc que $|x_i| \leqslant 5/2$) pour que l'une des combinaisons $y_1 + 2y_2$ appartienne à $[-3/2, 3/2]$.

C'est cette seconde hypothèse qui constitue la principale énigme du problème, et si l'on ne parvient pas à bien l'interpréter, il est facile de s'aventurer sur des voies sans issues. En définitive, c'est à partir de l'information : $|x_i - x_j| \leqslant (n+1)$ qu'il va falloir prouver que $|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n|$ prend des valeurs proches de zéro. Car sans ce point de départ, s'il est facile de trouver les permutations pour lesquelles la fonction Y est maximale ou minimale, celles qui la rendent voisine de zéro devront placer les valeurs extrêmes du n-uplet $(x_1, x_2, \dots x_n)$ "au centre", les valeurs moyennes aux extrémités, ce qui est impossible à formaliser.

Le pas à franchir, c'est de bien voir qu'on est en présence d'une étude de fonction, et que, comme pour le théorème de la valeur intermédiaire, il n'est pas nécessaire de chercher en quel point (pour quelle permutation) cette fonstion Y s'approche le plus de zéro pour prouver qu'elle s'en approche suffisamment, il suffit d'étudier ses variations. Dans un certain sens, ce problème s'apparente à l'énoncé 6 de l'an passé, mais à la différence des exercices scolaires, chaque énoncé d'Olympiade est particulier et l'on n'a pas fini de se laisser surprendre par de tels problèmes...même si certains y reconnaissent d'emblée des éléments connus !

J'ai reçu des solutions de Mohammed AASSILA (67 - Strasbourg), Jacques BOUTELOUP (76 - Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles) et Oubinool OMARJEE (75 - Paris). En outre, Hubert DELANGE (91-Orsay), par une méthode similaire, a établi le résultat plus général suivant :

Soient x_1, x_2, x_n des nombres réels de valeur absolue $\leqslant$ a.

Soit, d'autre part, λ_1, λ_2 ... λ_n des nombres réels de somme non nulle et tels que, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $|\lambda_{i+1} - \lambda_i| \leqslant b$ positif.

Si $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant \dfrac{n\,a\,b}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$ il existe une permutation $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telle que :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i\right| \leqslant ab$$

(l'énoncé d'Olympiade correspond à : $a = (n+1)/2$, $\lambda_i = i$ et $b = 1$).

ÉNONCÉ 4

Une matrice carrée à n lignes et n colonnes, à éléments dans l'ensemble $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ est appelée matrice ***d'argent*** si, pour tout $i = 1, \ldots, n$, la réunion de la i-ème ligne et de la i-ème colonne contient tous les éléments de S. Montrer que :

(a) Il n'existe pas de matrice d'argent pour n = 1997.

(b) Il existe des matrices d'argent pour une infinité de valeurs de n.

SOLUTION

(a) Pour $n \geqslant 2$, il existe au moins un élément $p \in S$ qui n'apparaît pas sur la diagonale. Mais pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, p apparaît une seule fois dans la réunion de la i-ème ligne et de la i-ème colonne : c'est dire qu'à tout $i \in \{1, \ldots n\}$, on peut associer un et un seul $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_{ij} = p$ ou bien $a_{ji} = p$ avec $i \neq j$: pour pouvoir classer ainsi en couples les n indices, il faut que n soit pair. Il n'existe donc pas de matrice d'argent pour n impair $\geqslant$ 3, donc en particulier pour n = 1997.

(**b**) Il existe une matrice d'argent d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ par exemple.

Montrons que s'il en existe d'ordre n, il en existe d'ordre 2n, ce qui prouvera par récurrence qu'il en existe pour toutes les puissances de 2, donc une infinité.

Soit A une matrice d'argent d'ordre n, B une matrice dont chaque ligne et chaque colonne soit une permutation de $\{2n, \dots, 3n-1\}$, et C une matrice dont chaque ligne et chaque colonne soit une permutation de $\{3n, \dots, 4n-1\}$. On choisira par exemple pour B la matrice symétrique :

$$\begin{aligned} b_{ij} &= i + j + (2n-2) && \text{si } i + j \leqslant n+1 \\ &= i + j + (n-2) && \text{si } i + j \geqslant n+2. \end{aligned}$$

Il est clair que la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix}$ est d'argent.

REMARQUES

Mohammed AASSILA (67 - Strasbourg), Jacques BOUTELOUP (76 - Rouen) et Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles) m'ont envoyé leurs solutions, et l'exemple ci-dessus de matrice d'argent est emprunté à Mohammed AASSILA et Jacques BOUTELOUP.

L'exemple que j'avais moi-même trouvé supposait que la matrice A d'argent d'ordre n n'avait que des 1 sur la diagonale : existe-t-il, à ce propos, des matrices d'argent ayant plusieurs nombres distincts sur la diagonale ? Bref, je rajoutais $(2n-1)$ à chaque élément de A pour obtenir la matrice B, et C était identique à B si ce n'est que je remplaçais les $(2n)$ de la diagonale par des $(4n-1)$.

Mais c'est Marie-Laure CHAILLOUT qui propose une technique de construction valable non plus seulement pour les puissances de 2 : l'idée est d'avoir une matrice symétrique avec seulement des 1 sur la diagonale, telle que chaque ligne (donc également chaque colonne) contienne tous les entiers de 1 à n, puis d'ajouter $(n-1)$ aux coefficients sous la diagonale. La matrice symétrique peut être définie par :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= i + j - 1 && \text{si } i < n, j < n, i + j \leqslant n + 1, i \neq j \\ &= i + j - n && \text{si } i < n, j < n, i + j \geqslant n + 2, i \neq j. \end{aligned}$$

$$a_{ii} = 1$$

et si $i \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} a_{i,n} = a_{n,i} &= 2i - 1 && \text{si } 2i \leqslant n + 1 \\ &= 2i - n && \text{si } 2i \geqslant n + 2 \end{aligned}$$

$$a_{1,n} = a_{n,1} = n$$

Pour $i \geqslant 2$, on déporte sur la dernière ligne et sur la dernière colonne l'élément qui se serait trouvé logiquement sur la diagonale si l'on n'avait pas imposé aux éléments de la diagonale d'être égaux à 1.

Par exemple, pour $n = 6$, la matrice symétrique est la suivante :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice d'argent :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ 8 & 9 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 1 & 3 & 2 \\ 10 & 11 & 7 & 8 & 1 & 4 \\ 11 & 8 & 10 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Grâce à ce procédé très général, il est possible d'organiser une saison de championnat sans que le nombre de clubs engagés soit une puissance de 2 : le club i rencontre à domicile le club j au cours de la p-ième journée si et seulement si $a_{ij} = p + 1$, mais ce n'est évidemment pas possible avec 1997 clubs !

ÉNONCÉ 5

Trouver tous les couples (a, b) d'entiers $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ vérifiant l'équation :

$$a^{(b^2)} = b^a.$$

SOLUTION

Le cœur de la démonstration est le lemme suivant :

LEMME

Soient u, v et q trois entiers strictement positifs. u^q divise v^q si et seulement si u divise v.

DEMONSTRATION

Si u^q divise v^q, ce que l'on note $u^q|v^q$, tout facteur premier p de u divise v : supposons qu'il ait pour exposant α dans la décomposition de u et β dans la décomposition de v : $p^{\alpha q} \mid p^{\beta q} \Rightarrow \alpha \leqslant \beta$; donc u | v.

RETOUR À L'ÉQUATION

Si, dans un couple solution, a = 1, alors b = 1, et réciproquement : hormis pour la solution triviale a = b = 1, on peut supposer $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$.

Si l'on avait $a \leqslant b$, on en déduirait : $a^{(b^2)} = b^a \leqslant b^b$, soit $a^b \leqslant b$, ce qui est impossible car pour tout entier $b \geqslant 0$, $b < 2^b \leqslant a^b$.

Si, maintenant, on avait $a \leqslant b^2$, on aurait $a^{(b^2)} = b^a \leqslant b^{(b^2)}$, donc $a \leqslant b$, nous venons de voir que c'est impossible.

Puisque $a > b^2$, $b^a = a^{(b^2)} > b^{(2b^2)}$, donc $a > 2b^2$, et $b^{(2b^2)}$ divise $b^a = a^{(b^2)}$ ce qui, par notre lemme, entraîne : $b^2 \mid a$.

On peut donc poser $a = kb^2$ avec $k > 2$, ce qui ramène l'équation à : $b^k = kb^2$ ou encore $b^{k-2} = k$. Comme pour $k \geqslant 5$, $b^{k-2} \geqslant 2^{k-2} > k$, il ne nous reste que deux cas à étudier :

$k = 4 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 2,\ a = kb^2 = 16$

$k = 3 \quad \Rightarrow \quad b = 3,\ a = kb^2 = 27.$

L'équation admet donc trois couples solutions : (1,1), (16 , 2) et (27 , 3).

REMARQUE

Le lemme était-il évident ? A mes yeux, oui, mais comme tout le monde l'a redémontré, il eût été indécent de faire exception.

Pour le reste, cette équation fait penser à : $x^y = y^x$. On peut d'ailleurs, comme le propose Roger CUCULIERE, poser $c = b^2$, et résoudre plus généralement $a^{2c} = c^a$. L'étude des variations de (log x)/x nous permet plus classiquement de prouver que $a > 2c$.

J'ai reçu des solutions de : Mohammed AASSILA (67 - Strasbourg), Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Jean-Christophe LAUGIER (17-Rochefort), Charles NOTARI (31-Montaud), Moubinool OMARJEE (75 - Paris, qui presque toutes partent de la constatation que a et b doivent être des puissances d'un même entier n. Cela ne dispense pas de prouver quea $> b^2$, mais cela donne une démonstration rapide si l'on remarque que l'un des entiers a ou b doit être égal à n. Hubert DELANGE (91-Bure s/Yvette) propose de généraliser l'équation en : $a^{(b^k)} = b^{(a^h)}$. Pour h = 1, les solutions sont de la forme $n^{1/n-k}$, $n^{n/n-k}$, et pour h = 2 et k = 3, la seule solution est (4,2), si l'on excepte (1,1). Jean-Christophe LAUGIER propose, lui, de résoudre cette équation en rationnels positifs.

ÉNONCÉ 6

Pour tout entier strictement positif n, on désigne par $f(n)$ le nombre de façons de représenter n comme une somme de puissances de 2 à exposants entiers positifs ou nuls.

Deux représentations qui ne diffèrent que par l'ordre des termes de la somme sont considérées comme les mêmes. Par exemple $f(4) = 4$, car le nombre 4 peut être représenté par les quatre façons suivantes ; 4 ; 2 + 2 ; 2 + 1 + 1 ; 1 + 1 + 1 + 1.

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$.

SOLUTION (1)

La fonction f est croissante : à toute représentation de n, je peux adjoindre 1 pour obtenir une représentation de n + 1, donc $f(n+1) \geqslant f(n)$. Réciproquement, $f(2n+1) = f(2n)$ car toute représentation de 2n + 1 contient au moins un 1, et en lui supprimant ce 1, je peux lui associer une représentation de 2n. En posant, par convention, $f(0) = 1$, on rend cette relation $f(2n) = f(2n+1)$ vraie, même pour n = 0.

Inversement, à toute représentation de 2n ne contenant pas le nombre 1, je peux associer bijectivement une représentation de n, en divisant tous les termes par 2. Donc à toute représentation de 2n contenant 2k fois le nombre 1, on associe bijectivement une représentation de n – k, si bien que :

$$f(2n) = \sum_{k=0}^{n} f(k) \qquad (1)$$

Comme f est croissante, $f(2n) \leqslant 1 + nf(n)$, ce qui prouve par récurrence la majoration cherchée : si $f(2^{n-1}) \leqslant 2^{(n-1)^2/2}$ (ce qui est déjà vrai pour $n - 1 = 2$), alors $f(2^n) \leqslant 1 + \dfrac{2^{n^2/2}}{\sqrt{2}} < 2^{n^2/2}$.

Pour la minoration, il faut remarquer que la relation (1) entraîne : $f(2) - f(2n-2) = f(n)$. La fonction : $n \mapsto f(2n) - f(2n-2)$ est donc croissante, ce qui entraîne que, pour tout k $(0 \leqslant k \leqslant n)$

$$f(2n) - f(2n-2k) \leqslant f(2n+2k) - f(2n).$$

Or, $f(2^n) = 2 + 2\sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(2k) + f(2^{n-1})$ du fait que $f(2k) = f(2k+1)$.

Dès lors

$$f(2^n) = 2 + f(2^{n-1}) + 2f(2^{n-2}) \quad + 2\sum_{k=1}^{2^{n-3}-1}\left(f(2^{n-2}-2k) + f(2^{n-2}+2k)\right)$$

$$> 4f(2^{n-2}) + 2\sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} 2f(2^{n-2}) = 2^{n-1} f(2^{n-2})$$

Donc si $f(2^{n-2}) \geqslant 2^{(n-2)^2/4}$ (ce qui est vrai pour n = 3 et n = 4); $f(2^n) > 2^{n^2/4}$, ce qui achève la démonstration, par récurrence.

REMARQUES

Cet énoncé était le plus difficile de la sélection, entre autre parce qu'il met en œuvre des fonctions qui ne s'expriment pas de manière classique, des ordres de grandeurs qu'on ne manipule pas tous les jours. Le majorant est égal au carré du minorant, ce qui représente une fourchette colossale. Or, c'est la minoration qui est la plus difficile à établir alors que la fonction est beaucoup plus proche de son majorant : Hubert DELAGE (91 - Bures s/ Yvette) fait remarquer qu'au lieu des puissances de 2, on pourrait tout aussi bien considérer les puissances d'un entier quelconque p > 1. Le même raisonnement aboutirait à : $p^{n^2/4} < f_p(p^n) < p^{n^2/2}$

mais en outre, $\text{Log}\, f_p(n) \sim \dfrac{\text{Log}^2 n}{2\,\text{Log}\, p}$ ce qui prouve que f_p se rapproche, d'une certaine manière, de son majorant.

J'ai reçu d'autres solutions voisines, de Mohammed AASSILA (67 - Strasbourg), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles) Moubinool OMARJEE (75 - Paris) et, bien sûr, Roger CUCULIÈRE (92 - Clichy), car cet énoncé fait partie de l'ouvrage sur les dix dernière Olympiades que nous publions ensemble, avec Jean-Pierre BOUDINE, aux éditions du Choix.

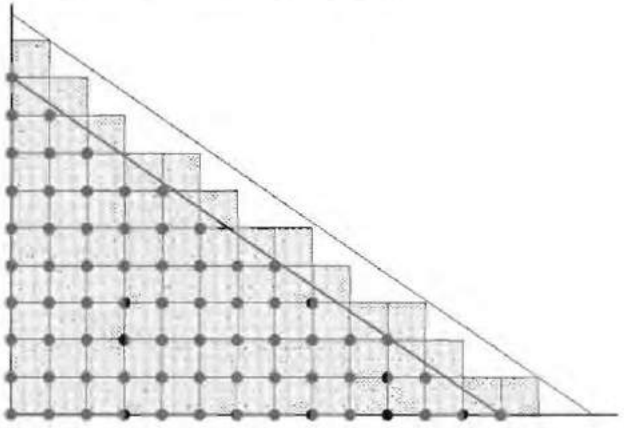
Mais Claude DESCHAMPS m'a transmis une solution originale de Roberto DVORNICIC, membre italien du jury d'Olympiade, solution s'apparentant à la *Géométrie des nombres* de MINKOWSKY, et c'est par là que je conclurai ces corrigés d'Olympiades 1997 :

SOLUTION (2)

Le problème revient à trouver toutes les solutions en entiers positifs ou nuls de l'équation : $x_0 + 2x_1 + 4x_2 + \ldots + 2^n x_n = 2^n$

ou, ce qui revient au même, toutes les solutions en entiers positifs ou nuls de l'inéquation : $2x_1 + 4x_2 + \ldots + 2^n x_n \leqslant 2^n$

Une seule de ces solutions vérifie $x_n \neq 0$, et à chacune des autres solutions, j'associe un point $(x_1, x_2, \dots x_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, à coordonnées entières positives ou nulles. On est donc ramené à étudier le nombre de points à coordonnées entières inclus dans un domaine connu de $\mathbb{R}^{n-1}$.



Pour simplifier la tâche du graphiste, la figure est faite dans le cas de $\mathbb{R}^2$, avec un domaine triangulaire ne correspondant pas précisément à celui qui nous préoccupe, car la méthode est très générale et c'est la même chose dans $\mathbb{R}^{n-1}$ que dans $\mathbb{R}^2$. A chaque point entier $(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$ du domaine j'associe l'hypercube de $\mathbb{R}^{n-1}$ (le carré dans le cas de $\mathbb{R}^2$) :

$$E(x_1) = k_1, E(x_2) = k_2, \dots E(x_{n-1}) = k_{n-1}.$$

Le nombre de points entiers du domaine est égal à la somme des volumes des hypercubes ainsi définis, puisque chaque hypercube a pour volume 1. S'agissant d'un domaine défini par : $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} \leqslant A$, $x_i \geqslant 0$ pour tout i (les a_i étant eux aussi positifs tout comme A), la somme des volumes des hypercubes est supérieure ou égale au volume du domaine puisque tout point du domaine appartient à un de ces hypercubes : en effet,

$$a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} \leqslant A \Rightarrow a_1E(x_1) + \dots + a_{n-1}E(x_{n-1}) \leqslant A.$$

Inversement, si $a_1(x_1 - 1) + a_2(x_2 - 1) + \dots + a_{n-1}(x_{n-1} - 1) \geqslant A$, alors $a_1E(x_1) + \dots + a_{n-1}E(x_{n-1}) > A$, donc la somme des volumes de ces hypercubes est majorée par le volume du domaine suivant :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} \leqslant A + (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}).$$

Si l'on pose $B = A + (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$, le nombre de points entiers du domaine $a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} \leqslant A$ est donc compris entre le volume du domaine : $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} \leqslant A$, soit $\left(\frac{A}{a_1} \cdot \frac{A}{a_2} \cdots \frac{A}{a_{n-1}}\right) \frac{1}{(n-1)!}$ et

le volume de : $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} \leqslant B$, soit $\left(\frac{B}{a_1} \cdot \frac{B}{a_2} \cdots \frac{B}{a_{n-1}}\right) \frac{1}{(n-1)!}$.

Pour $a_i = 2^i$, $A = 2^n$, $B = 2^n + 2^{n-1} + \ldots + 2 = 2^{n+1} - 2$

$$\frac{A}{a_1} \cdot \frac{A}{a_2} \cdots \frac{A}{a_{n-1}} = 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \ldots 2 = 2^{n(n-1)/2}$$

et $$\frac{B}{a_1} \cdot \frac{B}{a_2} \cdots \frac{B}{a_{n-1}} < 2^{n} \cdot 2^{n-1} \ldots 4 = \frac{1}{2} \cdot 2^{n(n+1)/2}$$

Si l'on récupère la représentation de 2^n que nous avions laissée de côté au début de la démonstration ($x_n = 1$, $x_{n-1} = \ldots = x_1 = x_0 = 0$), on a ainsi prouvé que :

$$1 + \frac{2^{n(n-1)/2}}{(n-1)!} \leqslant f(2^n) < 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2^{n(n+1)/2}}{(n-1)!}\right)$$

ce qui est meilleur que la relation de l'énoncé dans la mesure, notamment, où $2^{n/2} < (n-1)!$ pour $n \geqslant 4$. En outre, cet encadrement ne vaut pas seulement pour $f(2^n)$: pour tout A compris entre 2^{n-1} et $2^n - 1$,

$$\frac{A^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{2^{n(n-1)/2}} \leqslant f(A) < \frac{\left(2^n - 2 + A\right)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{2^{n(n-1)/2}}.$$