Démocratie et Mathématique

Yves HUSSET

Démocratie, suffrage universel, vote majoritaire sont choses si familières qu'elles paraissent aller sans dire. Tout au plus, sommes nous un peu perplexes lorsque nous nous rappelons qu'en 1875, le principe de la République fu adopté à ... une voix de majorité, qu'on parlait de sufrage universel alors même que les femmes ne votaient pas ou encore quand nous observons la diversité des "règle du jeu", c'est-à-dire des systèmes électoraux.

Le but de cet article est de montrer que des difficultés peuvent surgir lorsqu'on adopte la règle majoritaire pour arriver à une décision collective.

1 - Formulation mathématique

Soit V l'ensemble des votants, card $V = n$ et soit C l'ensemble des candidats : $C = \{a, b, c...\}$, card $C = m$. On demande à chaque votant de définir un ordre de préférence sur les candidats. On a ainsi, pour chaque votant, une "*opinion*" (individuelle) qui est un m-uple, élément de C^m.

Soit O l'ensemble des opinions possibles et $o_1, o_2,...,o_n$ les opinions des n votants successivement. Un "*état de l'opinion*" sera noté $e = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ et l'on a : $e \in O^n$.

Il s'agit donc d'associer à tout état de l'opinion un ordre de préférence qui sera dit "*opinion collective*". En d'autres termes, il faut définir une application $f : O^n \mapsto O$, de telle sorte qu'à tout élément e de O^n corresponde un élément de O. Comme card $O = m!$, on voit que le nombre de règles *théoriquement possibles* est de :

$$(m!)^{(m!)^n}.$$

Les deux exemples qui suivent retiennent le système classique du vote majoritaire.

2 - Un exemple moins simple qu'il n'y paraît

Soit une assemblée de 60 personnes ayant à se prononcer *à la majorité* sur trois candidats a, b, c et supposons que l'état de l'opinion soit le suivant :

(a, b, c)	(a, c, b)	(b, a, c)	(b, c, a)	(c, a, b)	(c, b, a)	
0	23	0	19	2	16	60

Introduisons à ce stade de l'exposé *l'axiome de la transitivité des préférences*. En notant "x préféré à y" de la manière suivante : $x \succ y$, l'axiome s'énonce ainsi :

$$\forall (x, y, z) \in C^3, x \succ y \text{ et } y \succ z \Rightarrow x \succ z.$$

Si l'on suppose que cet axiome (de bon sens) est vérifié pour chacun des votants et que l'on procède à une analyse par paires du scrutin, on en déduit que la majorité préfère c à b (par 41 contre 19), b à a (par 35 contre 25) et c à a (par 37 contre 23). On constate que la transitivité a été conservée au niveau de l'opinion collective et on peut légitimement poser que *l'opinion de l'assemblée* est (c, b, a). Reste évidemment à convaincre l'électeur de base qui regarderait le tableau *supra* ...

3 - Un exemple vraiment déconcertant

En prenant toujours comme hypothèse card $V = 60$ et card $C = 3$, considérons maintenant l'état de l'opinion suivant :

(a, b, c)	(a, c, b)	(b, a, c)	(b, c, a)	(c, a, b)	(c, b, a)	
23	0	2	17	10	8	60

Supposons, comme précédemment, que l'axiome de transitivité des préférences est vérifié pour chacun des votants et que l'on procède à l'analyse par paires du scrutin. En désignant par $N(x, y)$ le nombre des votants qui préfèrent x à y, on voit que $N(a, b) > N(b, a)$, $N(b, c) > N(c, b)$ et $N(c, a) > N(a, c)$. Autrement dit, la majorité préfère a à b, b à c mais aussi c à a!... La transitivité n'a pas été conservée et un *cycle* est apparu. Cet effet - désastreux - a été mis en évidence par CONDORCET et est connu sous le nom d'*effet*

Condorcet. Le marquis avait ouvert la voie et il ne restait plus qu'à poursuivre. C'est ainsi que Kenneth ARROW, prix Nobel d'Economie 1972, s'intéressa à cette question de l'agrégation des préférences individuelles et énonça le théorème qui porte son nom. Le lecteur désireux d'aller plus loin pourra consulter le récent et agréable petit livre de Jean-Louis Boursin [2].

*

« *Tant qu'il y aura des dictatures, je n'aurai pas le cœur à critiquer une démocratie* » écrivait avec sagesse Jean ROSTAND dans *Inquiétudes d'un biologiste*. Le mode normal de désignation des dirigeants dans une démocratie est le vote portant sur la pluralité de candidats et l'exposé qui vient d'être fait n'est évidemment pas une condamnation du vote majoritaire. Il rappelle seulement, si besoin était, que la détermination des préférences collectives à partir de préférences individuelles est une question délicate.

A propos de ...

Marie Jean Antoine Nicolas CARITAT
Marquis de Condorcet (1743-1794)

Philosophe, encyclopédiste, mais aussi mathématicien, après des études au collège des jésuites de Reims, puis au Collège de Navarre à Paris, Condorcet prend une part importante à la rédaction de l'Encyclopédie, puis entre en 1769 à l'Académie des Sciences et en 1782 à l'Académie française.

Enthousiasmé par les idées de la Révolution, il est élu à l'Assemblée législative et participe activement à la réforme du système éducatif.

Emprisonné sous la Terreur, car partisan des Girondins, il se donne vraisemblablement la mort dans sa cellule.

On lui doit de nombreux travaux mathématiques : calcul intégral, application des probabilités à la théorie des sciences sociales, et en particulier étude mathématique du comportement électoral dont il est un précurseur.

A propos de ...

La théorie d'ARROW

Né en 1921 à New York, l'économiste Kenneth ARROW développe, dans son ouvrage *"Choix collectif et préférences individuelles"* (traduit en français en 1974) une véritable axiomatique du choix social au sein d'une démocratie :

- ***Première condition (universalité)*** : A partir d'un classement des individus, la règle doit toujours permettre de dégager un choix collectif.
- ***Deuxième condition (unanimité)*** : Si tous les individus préfèrent A à B, la règle doit fournir un classement collectif dans lequel A est préféré à B.
- ***Troisième condition (indépendance)*** : Le choix fait entre deux décisions A et B n'est pas modifié par l'introduction d'une nouvelle possibilité C.
- ***Quatrième condition (pas de dictateur)*** : Le choix social ne saurait coïncider constamment avec celui d'un même individu.

ARROW énonce alors un "théorème" :

Une procédure d'agrégation des opinions individuelles
indépendante et non dictatoriale
ne peut pas être unanime.

Bibliographie

[1] Kenneth ARROW, *Choix collectifs et préférences individuelles*, Paris Calmann-Lévy, 1974.

[2] Jean-Louis BOURSIN, *Des préférences individuelles aux choiox collectifs*, Paris, Economica, coll. Economie popche, 1995.

[3] G. KREVERAS, *Les décisions collectives*, Mathématiques et Sciences Humaines, n°2.