## Echanges

# Résolution graphique des équations algébriques du 3e et du 4e degré

**Daniel MANSION**

(Nice)

*Le problème soulevé peut aujourd'hui paraître anachronique, mais il ferait l'occasion d'un bon travail "sans calculatrice" avec des élèves qui auraient tendance à en abuser.*

Comme nous l'a rappelé le numéro 50 de *Tangente* (juin 1996, page 27), la formule de CARDAN a été publiée pour la première fois en 1545. Elle comporte deux racines cubiques et deux racines carrées, à calculer *à la main* ..., ce qui est long et délicat.

C'est pourquoi on a imaginé des méthodes graphiques simples et rapides, permettant de résoudre les équations du troisième et du quatrième degré. Parmi les plus faciles, figurent celles qui utilisent la parabole $y = x^2$ que l'on dessine une fois pour toutes. Cette parabole est coupée par une circonférence dont on doit calculer le rayon et les coordonnées du centre. Cette méthode est très facile et rapide. Il suffit alors de lire les abscisses des points d'intersection de la parabole et de la circonférence : ce sont les racines cherchées.

On peut éventuellement augmenter indéfiniment la précision de ces racines, par simples interpolations linéaires graphiques, ce qui rappelle le principe du *zoom photographique*.

On remarquera que la même parabole est utilisée pour les équations du troisième et du quatrième degré.

## Résolution graphique des équations du 3e degré

Soit à déterminer les racines de :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0) \quad \textbf{(1)}$$

**RAPPEL**

Il faut d'abord éliminer le deuxième terme $bx^2$ : c'est la *réduction* classique que l'on réalise en posant : $x = X - h$ **(2)**

et en divisant **(1)** par $a$, pour obtenir, après développement : **(3)**

$$X^3 + X^2\underbrace{\left(\frac{b}{a} - 3h\right)}_{0} + X\underbrace{\left(3h^2 - 2\frac{b}{a}h + \frac{c}{a}\right)}_{p} + \underbrace{\left(-h^3 + \frac{b}{a}h^2 + \frac{c}{a}h + \frac{d}{a}\right)}_{q} = 0$$

Pour éliminer le deuxième terme $X^2$, il suffit que : $h = b/3a$ **(4)**

En appelant $p$ et $q$ les parenthèses indiquées, on obtient l'*Equation réduite* :

$$X^3 + pX + q = 0 \quad \textbf{(5)}$$

Toutes les méthodes de calcul des racines de **(1)** utilisent ce procédé.

## Traduction graphique

Pour résoudre **(5)**, on multiplie par $X$, ce qui introduit une racine nulle. D'où :

$$X^4 + pX^2 + qX = 0 \quad \textbf{(6)}$$

On introduit $Y = X^2$ ou $X^2 - Y = 0$ **(7)**

**(6)** devient alors : $Y^2 + pY + qX = 0$ **(8)**

soit, en combinant **(7)** et **(8)**, $X^2 + Y^2 + qX + (p-1)Y = 0$ **(9)**

Ainsi, toute racine de **(6)** est l'abscisse de l'une des intersections de la parabole *(P)* d'équation **(7)** et du cercle *(C)* d'équation **(9)**, de centre $\Omega\,(-q/2\,;\,(1-p)/2)$, et passant par l'origine.

**Premier exemple :** $x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = 0$.

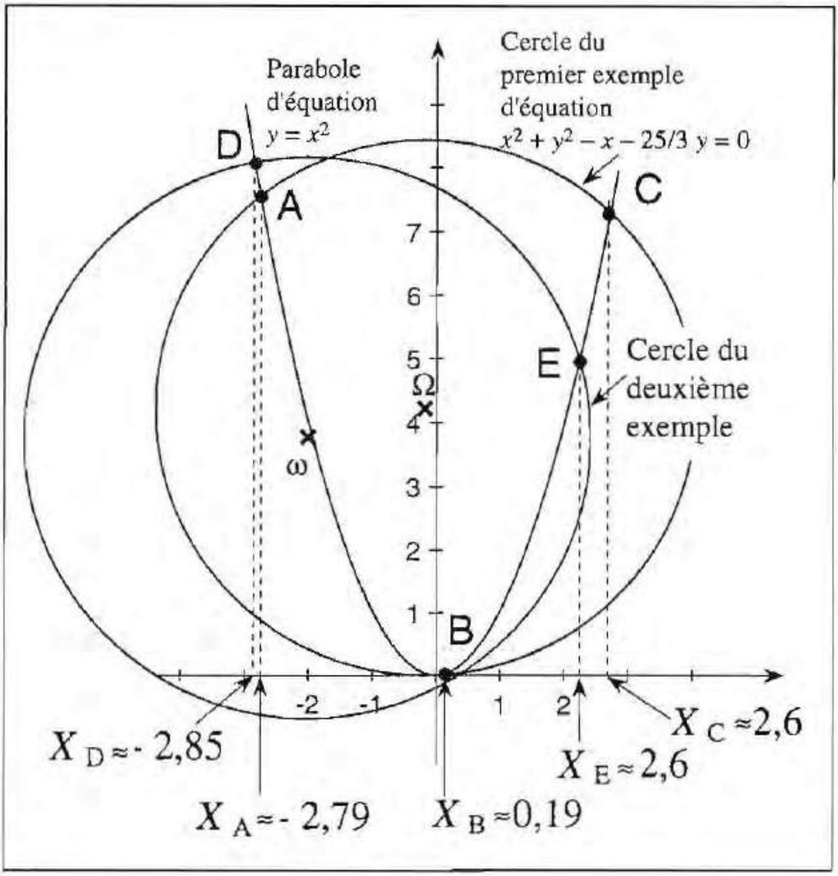
Dans ce cas, $h - 2/3$, $p = -22/3$ et $q = 11/27$.

Le centre du cercle *(C)* a pour coordonnées $(-11/54, 25/6)$, et on lit graphiquement les abscisses des intersections autre que 0 de *(P)* et *(C)* :

$$X_A \approx -2{,}79 \qquad X_B \approx 0{,}19 \qquad X_C \approx 2{,}6$$

ce qui donne :

$$x_A \approx -2{,}13 \qquad x_2 \approx 0{,}86 \qquad x_3 \approx 3{,}27$$




## Résolution graphique des équations du quatrième degré

Soit à déterminer les racines de :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \qquad (a \neq 0) \qquad \mathbf{(11)}$$

**RAPPEL**

Il faut tout d'abord éliminer le deuxième terme $bx^3$.

C'est la *réduction* classique que l'on réalise en posant :

$$x = X - h \qquad \textbf{(12)}$$

Ce qui donne :

$$X^4 + X^3\underbrace{\left(\frac{b}{a} - 4h\right)}_{0} + X^2\underbrace{\left(6h^2 - 3\frac{b}{a}h + \frac{c}{a}\right)}_{r} + X\underbrace{\left(\frac{d}{a} + 3\frac{b}{a}h^2 - 4h^3 - 2\frac{c}{a}h\right)}_{s}$$

$$+ \underbrace{\left(h^4 - \frac{b}{a}h^3 + \frac{c}{a}h^2 - \frac{d}{a}h + \frac{e}{a}\right)}_{t} = 0 \qquad \textbf{(13)}$$

Pour éliminer le deuxième terme $X^3$, il suffit que :

$$h = b/4a \qquad \textbf{(14)}$$

En appelant $r$, $s$, $t$ les parenthèses indiquées, on obtient *l'équation réduite :* $X^4 + rX^2 + sX + t = 0$ **(15)**.

Pour résoudre **(15)**, on pose :

$$Y = X^2 \qquad \text{soit} \qquad X^2 - Y = 0, \quad \text{comme au (7)}$$

**(15)** s'écrit alors :

$$Y^2 + rY + sX + t = 0 \qquad \textbf{(17)}$$

On combine (**16**) et (**17**), ce qui donne :

$$X^2 + Y^2 + sX + (r-1)Y + t = 0 \qquad \textbf{(18)}$$

De même que précédemment, toute racine de **(15)** est l'abscisse de l'une des intersections de la parabole *(P)* d'équation (**7**) et du cercle *(C)* d'équation (**18**), de centre $\omega$ $(-s/2, (1-r)/2)$ et de rayon $R = \frac{1}{2}\sqrt{s^2 + (r-1)^2 - 4t}$

**Deuxième exemple :** $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 5 = 0$

Ici, $h = -0{,}5$ $\quad r = -6{,}5$ $\quad t = -23/16 = -1{,}4375$

$X_H = -2$ $\quad Y_H = 3{,}75$ $\quad R = \sqrt{19.5} \approx 4{,}42$

Le cercle de centre $\omega$ et de rayon $R$ coupe la parabole en deux points $D$ et $E$ d'abscisses, lues sur la figure : $X_D \approx -2{,}85$ et $X_E \approx 2{,}25$. (**12**) donne les racines de (**11**) : $x = X + 0{,}5$ soit : $x_D = -2{,}35$ net $y_D = 2{,}75$.

Les deux autres racines sont imaginaires.