Régionnement du plan par les bissectrices

Georges LION

Par les moyens de la géométrie élémentaire, on établit les relations caractérisant l'appartenance d'un point à chacune des parties du plan délimitées par les bissectrices de deux droites concourantes. Obtenue sans usage du postulat d'Euclide, la conclusion restera valide en géométrie de Poincaré et l'on en déduira un autre résultat de géométrie euclidienne.

Introduction

Soit D et D' deux droites sécantes en O ; Δ et Δ_1 les bissectrices des secteurs angulaires formés par D et D' ; σ et σ_1 les réflexions d'axes respectifs Δ et Δ_1 . Il est clair que σ et σ_1 échangent D et D' et que tout point de $\Delta \cup \Delta_1$ est équidistant de D et de D'.

La réciproque de cette propriété est de démonstration moins aisée. Il est donc tentant de "court-circuiter" cette réciproque en établissant le **régionnement du plan** (privé de $\Delta \cup \Delta_1$) par des inégalités strictes entre les distances $d(M, D)$ et $d(M, D')$; un point en lequel on a égalité de distances se trouve alors nécessairement sur l'une des bissectrices.

Par ailleurs, l'étude de ce régionnement, rapprochée de ce qu'on dit de la médiatrice d'un segment, a l'avantage de mettre en lumière les analogies fondamentales de la géométrie élémentaire entre points et droites, segments et secteurs, médiatrices et bissectrices.

Le régionnement par les bissectrices peut-il intéresser les élèves du Collège et leurs professeurs ? N'ayant jamais enseigné dans ce cadre, je me garderai bien de répondre à cette question ; cependant il me semble que, face aux difficultés de transmission du savoir, un enseignant peut tirer avantage à se sentir personnellement bien assuré dans ses connaissances, et ceci par le seul recours aux notions du programme qu'il enseigne. D'expérience, je sais qu'un autre public a du goût pour de telles préoccupations : il s'agit des étudiants préparant le CAPES et désireux de mettre un peu de cohérence mathématique dans leur appréhension de la géométrie.

Les fondements axiomatiques pouvant servir de point de départ à un cheminement rigoureux en direction du sujet traité ici se trouvent par exemple dans les ouvrages de G. Choquet ([1], p. 162 et 164), A. Cousin ([2] p. 12), D. Hilbert ([4]) et J. Lelong-Ferrand ([5] p. 207).

La démonstration euclidienne

Précisons ce qu'il faut démontrer :

Proposition : Soit xOy l'un des secteurs déterminés par les droites D et D', et Oz la bissectrice de $\widehat{xOy}$; de $M \in xOy \setminus (Oz \cup Ox)$, notons H et K les projetés orthogonaux respectifs sur D et D'. Alors, on a $MH < MK$.

En effet (fig. 1), l'angle $\widehat{xOz}$ étant aigu, les demi-droites Oz et $[HM)$ se coupent en I (Euclide). Ce point I est distinct de M et la droite (IM) n'est pas perpendiculaire à D' ; H' projeté orthogonal de I sur D' est distinct de K d'où l'inégalité : $IK > IH'$.

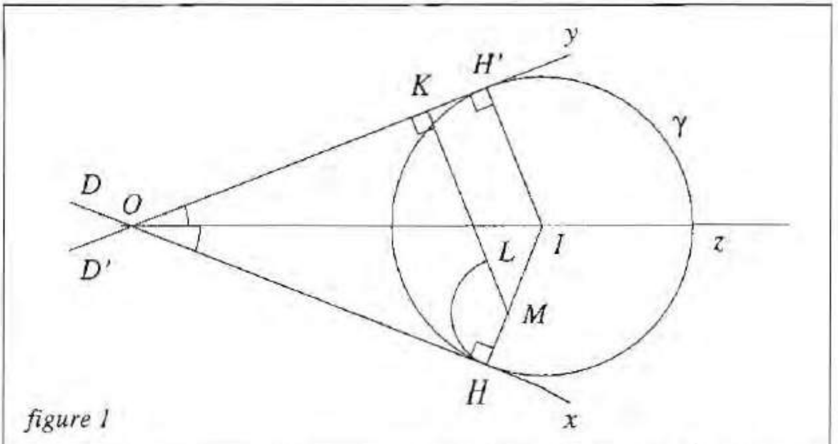


figure 1

Sur la demi-droite $[MK)$, introduisons par ailleurs L tel que $ML = MH > 0$. Sachant I, M, L non alignés, l'inégalité triangulaire implique :

$$LI < LM + MI = HM + MI = HI = H'I.$$

Les deux points L et K sont situés sur la demi-droite $[MK)$; si γ est le cercle de centre I passant par H', L est à l'intérieur du disque limité par γ, tandis que K est à l'extérieur ; puisque le disque est convexe et contient aussi M, il vient l'inégalité demandée : $ML < MK$.

Remarques

1 - Une autre démonstration élémentaire mais incomplète se trouve dans HADAMARD ([3] p. 37).

2 - Par rapport à la démonstration ci-dessus la méthode imposée aux candidats du CAPES 1996 (Deuxième épreuve I-3) et fondée sur le calcul barycentrique m'a donné l'impression d'un "marteau-pilon" hors de proportion avec la nature de la question étudiée. Le caractère élémentaire de cette question apparaîtra encore mieux dans la démonstration "pré-euclidienne" rédigée ci-dessous.

La démonstration générale

Nous cherchons à éviter l'emploi du postulat d'Euclide en conservant la validité des autres axiomes ; la démonstration sera a fortiori valable en géométrie euclidienne. On a tracé les figures dans ce cadre et dans le cadre de la géométrie de Poincaré (voir aussi l'annexe en fin d'article).

Gardant les notations précédentes, distinguons deux cas de figure :

• *Le point K est sur Oy* (figures 2 et 3) :

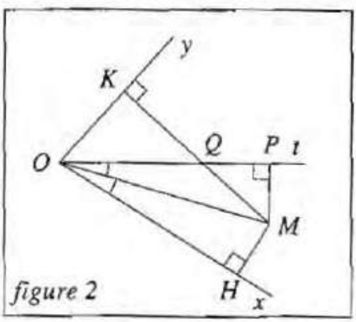


figure 2

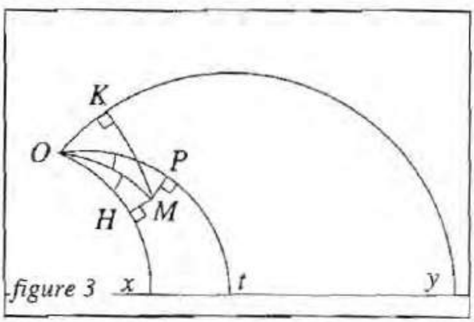


figure 3

Soit Ot symétrique de Ox par rapport à (OM), P projeté orthogonal de M sur Ot.

Les relations $\widehat{MOt} = \widehat{MOk} < \widehat{MOy}$

impliquent :

Ot est distincte de Oy et contenue dans le secteur xOy

Le segment $[M, K]$ coupe Ot en Q distinct de P car les droites (MP) et (MK) sont distinctes et M est hors de Ot ; d'où : $MK \geqslant MQ > MP = MH$.

• *Le point K est hors de Oy* (figures 4 et 5)

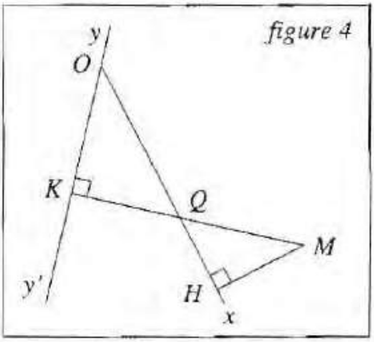


figure 4

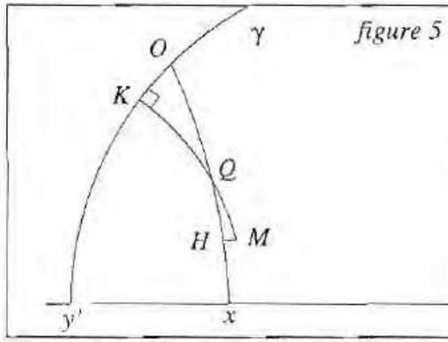


figure 5

K appartient à Oy' distincte de Ox : le segment $[M, K]$ coupe D en Q car M et K sont maintenant de part et d'autre de D ; les points Q et H sont distincts car les droites (MH) et (MK) le sont et M est hors de D ; d'où : $MK \geqslant MQ > MH$.

Remarques :

1 - Dans ce dernier cas, on n'a pas utilisé l'hypothèse $\widehat{MOx} < \widehat{MOy}$. Mais cette inégalité a nécessairement lieu lorsque ce cas se présente.

2 - Ecarté de l'énoncé de la proposition pour des raisons de commodité, le cas "$M \in Ox$" est immédiat puisqu'alors $d(M, D)$ est nulle.

Conclusions

Nous pouvons maintenant énoncer :

Théorème I : Soit D et D' sécantes en O ; Δ et Δ_1 les bissectrices des secteurs limités par D et D' ; S_1 et S_3 ceux des secteurs droits limités par Δ et Δ_1 et contenant une demi-droite de D ; S_2 et S_4 étant de même vis à vis de D', alors

a) $S_1 \cup S_3 = \{M \mid d(M, D) < d(M, D')\}$

b) $S_2 \cup S_4 = \{M \mid d(M, D) > d(M, D')\}$

c) $\Delta \cup \Delta_1 = \{M \mid d(M, D) = d(M, D')\}$

En effet (fig. 6), on sait que si M appartient à l'un des ensembles écrits à gauche, alors M satsifait à la relation correspondante écrite à droite. Pour les récipropques, on remarque que les ensembles écrits à gauche ont pour réunion le plan tout entier ; si M vérifie par exemple l'égalité, M ne peut appartenir qu'à $\Delta \cup \Delta_1$ puisqu'une autre appartenance impliquerait une relation contradictoire avec l'égalité.

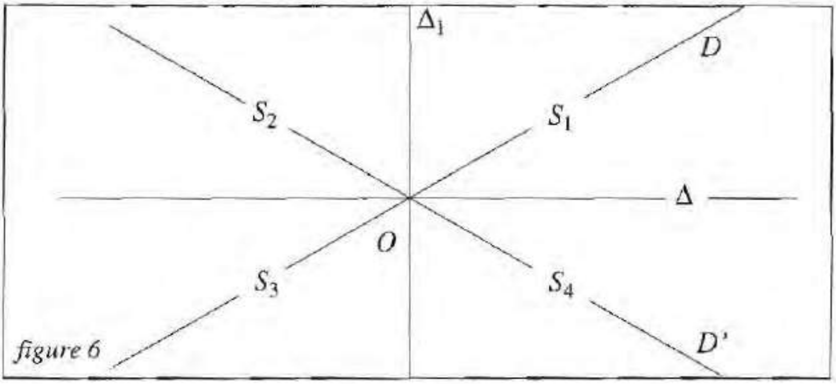


figure 6

Applications aux objets de la géométrie de Poncaré

Supposons acquis (voir en annexe) que, mis à part l'axiome d'Euclide, la géométrie du demi-plan de Poincaré satisfait aux mêmes axiomes que la géométrie euclidienne. Le théorème I est donc valide dans les deux cadres ; mais lu dans l'optique de Poincaré, ce théorème concerne des objets qui ont aussi un sens en géométrie euclidienne (demi-droites, demi-cercles, angles).

La traduction euclidienne du théorème I énoncé pour Poincaré est alors la suivante :

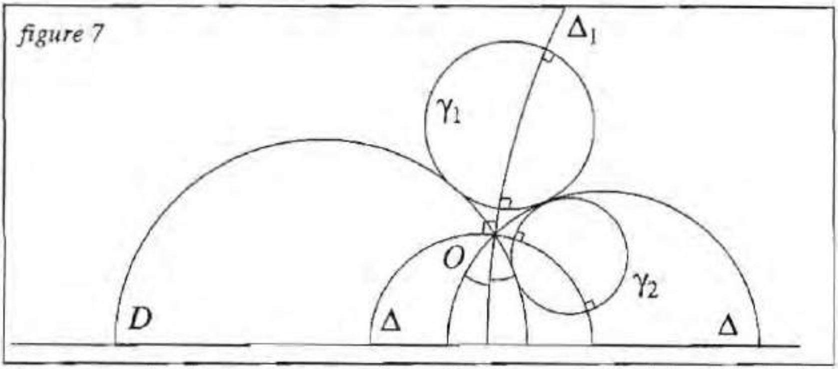
Corollaire : Soit D et D' deux cercles (ou un demi-cercle et une droite) sécants en O ; $\mathcal{R}$ la droite orthogonale à D et D' ; $\mathcal{P}$ le demi-plan limité par $\mathcal{R}$ et contenant O.

Alors, il existe deux cerclesΔ et Δ_1 centrés sur $\mathcal{R}$ (ou un cercle Δ centré sur $\mathcal{R}$ et une droite Δ_1 perpendiculaire à $\mathcal{R}$), passant par O, orthogonaux, et tels que tout cercle γ contenu dans $\mathcal{P}$ et **tangent** à D et D' soit **orthogonal** à Δ ou à Δ_1

En effet (fig. 7), en redonnant aux objets en question leur sens de Poincaré, il suffit de tracer les bissectrices Δ et Δ_1 des secteurs limités par D et D' ; équidistant de D et de D' le centre de γ (distinct du centre euclidien de

γ) appartient alors à $\Delta \cup \Delta_1$ et γ admet Δ ou Δ_1 comme diamètre.

figure 7



Remarque : Le lecteur sera peut-être séduit par cette "spirale épistémologique" qui pourrait permettre de fabriquer des théorèmes par simple changnement du sens des objets. En toute honnêteté, je dois signaler que le corrolaire énoncé ci-dessus peut être démontré sous une forme plus générale par **inversion**.

Dans cet ordre d'idées, il existe cependant une autre situation plus convaincante : pour tout triangle sans angle obtus,; on peut prouver le concours des hauteurs sans recours au postulat d'Euclide ; appliquée au demi-plan de Poincaré et traduite en termes euclidiens, cette propriété donne un résultat sur des faisceaux de cercles, résultats dont la démonstration euclidienne directe n'a rien d'évident.

Annexe : Quelques renseignements sur la géométrie de Poincaré

Soit $\mathcal{R}$ une droite du plan euclidien et $\mathcal{P}$ l'un des demi-plans qu'elle limite (en général, onles identifie à l'axe réel et au demi-plan $y > 0$ du plan complexe). Les "droites" de $\mathcal{P}$ sont des demi-cercles centrés sur $\mathcal{R}$ ou les demi-droites perpendiculaires à $\mathcal{R}$. Les angles sont les mêmes qu'en géométrie euclidienne. Si O est un point de $\mathcal{P}$, l'ensemble des "cercles" de centre O est identique à l'ensemble des trajectoires orthogonales des "droites" passant par O ; il s'agit donc des cercles euclidiens contenus dans $\mathcal{P}$ et appartenant au faisceau dont les points de Poncelet sont O et son symétrique par rapport à $\mathcal{R}$.

"Droites" et "cercles" sont ainsi des objets euclidiens simples et c'est ce qui fait notre bonheur! Plutôt que de revenir aux axiomes, vérifions directement dans $\mathcal{P}$ la validité de quelques points cruciaux de la démonstration qualifiée de générale plus haut. Sauf mention expresse du contraire, les mots seront désormais employés dans leur sens de Poincaré.

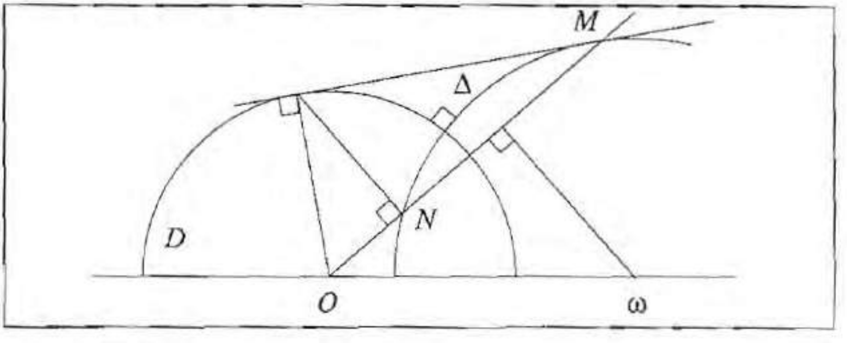
Si deux droites sont sécantes en O, on construit, grâce aux angles, la symétrique de l'une par rapport à l'autre et la réflexion ainsi définie est une isométrie. Réciproquement, on peut construire les bissectrices des secteurs angulaires définis par deux droites sécantes données.

Toute droite D partage $\mathcal{P}$ en deux demi-plans et tout segment allant de l'un à l'autre rencontre D (on laisse le lecteur mettre la preuve en forme).

Si D est une droite de en forme, par tout point M de $\mathcal{P}$ passe une unique perpendiculaire à D : c'est facile lorsque D est une demi-droite euclidienne ou bien encore lorsque, O étant le centre euclidien de D, la droite euclidienne (OM) est perpendiculaire à $\mathcal{R}$.

Dans le cas général (fig.8), soit O et R le centre et le rayon euclidiens de D. Toute droite Δ passant par M et orthogonale à D recoupe nécessairement la droite euclidienne (OM) en N tel que $OM.ON = R^2$.

Cela démontre l'unicité de Δ. La construction de N puis celle de Δ sont alors lisibles sur la figure 8.



Bibliographie

[1] G. CHOQUET, *L'enseignement de la géométrie* (Hermann), 1964.

[2] A. COUSIN-FAUCONNET, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand-Colin, 1995.

[3] J. HADAMARD, *Leçons de géométrie*, tome 1, Armand Colin, 1947, réédition Gabay 1988.

[4] D. HILBERT, *Les fondements de la géométrie*, Teubner Verlag, traduction Rossier, Dunod, 1971.

[5] J. LELONG-FERRAND, *Les fondements de la géométrie*, PUF, 1985.