Brouillons pour des sujets de bac du troisième millénaire

Daniel REISZ
IREM de DIJON

L'APMEP, mais aussi les instances institutionnelles (IREM, IGEN, DLC,...) ont engagé une réflexion sur le contenu, le profil et l'esprit des épreuves de mathématiques du baccalauréat. Aux journées de Marseille, toutes sortes de propositions ont été émises par les uns et les autres (retour à une question de cours, QCM, exercices et/ou problèmes plus ouverts, etc.). J'exclus ici un autre débat qui a parasité celui-ci : le statut des calculatrices. Supposons aussi que le contenu des programmes reste à peu près stable, même si on sent une volonté d'en faire évoluer l'esprit (troisième débat majeur de cette fin de siècle). Et puisque nous parlons programme, relisons quelques objectifs des actuels programmes : expérimenter, conjecturer, raisonner, communiquer, organiser,... On peut alors légitimement se demander si les épreuves actuelles du baccalauréat vont dans le sens de ces objectifs. Certes, on m'objectera, à juste titre, qu'il faut distinguer les objectifs d'évaluation d'un examen de masse et les objectifs de formation d'un enseignement, mais il faudrait être bien naïf de sous-estimer l'effet rétroactif de la forme des épreuves d'examen sur la formation dispensée.

Afin d'éviter qu'on en reste aux pétitions de principe, je jette, non pas un pavé, mais plusieurs cailloux dans la mare, sous forme d'exercices à énoncés plus ouverts, demandant aux élèves certaines initiatives (choix de nota-

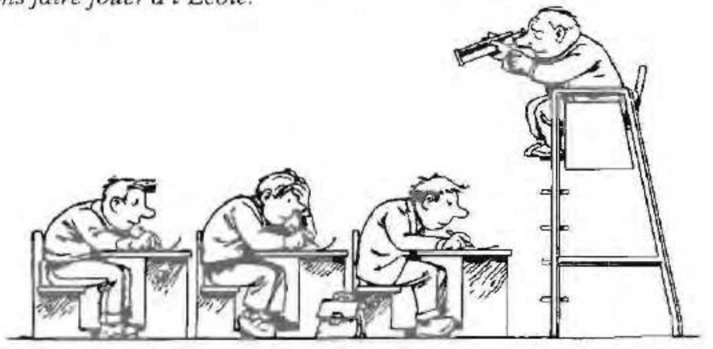
tions pertinentes, angle d'attaque, choix des outils, etc.) Posons en axiome que 2/3 à 3/4 des candidats seront reçus, coûte que coûte et que notre discipline doit jouer un rôle discriminant. Le problème consiste alors à répondre à deux questions :

- *de nouvelles épreuves assureront-elles mieux la formation scientifique et générale des élèves, par leur rôle rétroactif ?*
- *de nouvelles épreuves "sélectionneront-elles" d'autres (de meilleurs ?) profils d'élèves que les épreuves actuelles ?*

Soyons clairs! Les épreuves ne doivent sans doute pas être uniquement constituées de problèmes à énoncés ouverts. Rien n'empêchera d'évaluer aussi des connaissances précises ou un savoir-faire de pure routine. Mais les difficultés majeures de tels énoncés me semblent relever de deux ordres :

- *nécessité de laisser du temps au candidat pour s'approprier un tel problème ;*
- *l'évaluation de la production d'un candidat ne pourra en aucun cas se solder à la seule "solution", mais devra prendre en compte les idées avancées, la qualité de leur exposition, l'analyse des difficultés et des échecs : bref, un rapprochement sensible de la démarche d'évaluation de nos collègues des disciplines littéraires.*

Les énoncés qui suivent (conçus "évidemment" pour des élèves de la série S) veulent simplement être du grain à moudre pour alimenter le débat, sans aucun souci normatif. Gardons-nous de nos certitudes, gardons-nous de la précipitation et sachons exiger des décideurs le temps nécessaire pour habituer les élèves à une évolution qui pourrait, qui devrait, être profonde. Enfin, soyons conscients que les choix qui seront faits seront idéologiques, que ce soit pour la vision que nous avons des mathématiques, que ce soit pour notre conception de l'apprentissage, que ce soit pour le rôle que nous entendons faire jouer à l'École.



Enoncé 1

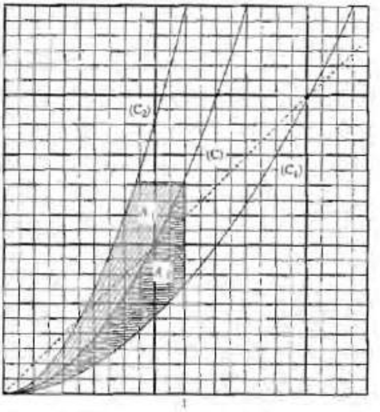
On dit qu'une courbe (C) "bissecte" en termes d'aire les courbes (C_1) et (C_2) si, pour tout $t > 0$, les aires des deux domaines hachurés A_1 et A_2 sont égales.

On suppose que :

(C) a pour équation $y = x^2$

(C_1) a pour équation : $y = \frac{1}{2}x^2$

Déterminer l'équation de (C_2).



Indication : observer le symétrique du domaine A_2 par rapport à la première bissectrice du repère.

Enoncé 2

Entendu dans un bistrot : "*Comment se fait-il que je ne trouve jamais les trois chevaux du tiercé, avec quinze chevaux au départ, alors qu'au Loto j'en ai très souvent trois de bons sur sept et pourtant je dois les choisir parmi quarante neuf ?*"

Commentez cette "brève de comptoir".

Enoncé 3

Pour $x > 0$, on considère les deux fonctions f et g définies par

$f(x) = \ln x$

$g(x) = k\sqrt{x}$ où k est une constante strictement positive.

On sait que pour x voisin de 0 et pour x voisin de $+\infty$, $f(x) < g(x)$.

On peut vérifier, par exemple sur une calculatrice graphique,

- que si $k = 1$ $f(x) < g(x)$ pour tout x positif
- que si $k = \frac{1}{2}$ $f(x) > g(x)$ sur un certain intervalle.

On peut donc penser qu'entre $\frac{1}{2}$ et 1, il existe une valeur de k et une valeur α de x telles que

$f(x) < g(x)$ pour tout $x \neq \alpha$

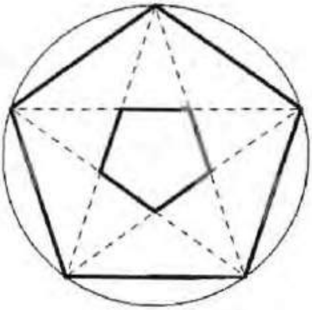
$f(\alpha) = g(\alpha)$

et qu'en ce point d'abscisse α les deux courbes soient tangentes.

Etudier cette situation.

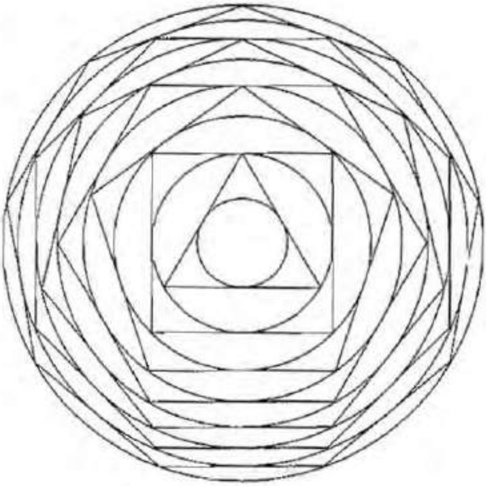
Enoncé 4

La figure ci-contre représente un pentagone régulier, le pentagone étoilé associé et on peut remarquer à l'intérieur de ce dernier un petit pentagone régulier. Le cercle circonscrit a pour rayon R. Déterminer les différents angles et longueurs caractéristiques de ces différents pentagones, ainsi que la transformation permettant de passer du grand au petit.



Enoncé 5

La figure ci-contre montre les premières étapes d'une construction itérative, à partir d'un premier stade : le triangle équilatéral et son cercle circonscrit.



Après avoir décrit de façon précise cette procédure itérative qu'on peut imaginer se poursuivre indéfiniment, on se posera quelques questions pertinentes à son sujet. On ne demande pas de rédiger la solution à ces questions, mais leur faisabilité, avec les connaissances mathématiques d'un lycéen, sera un élément important de l'évaluation.

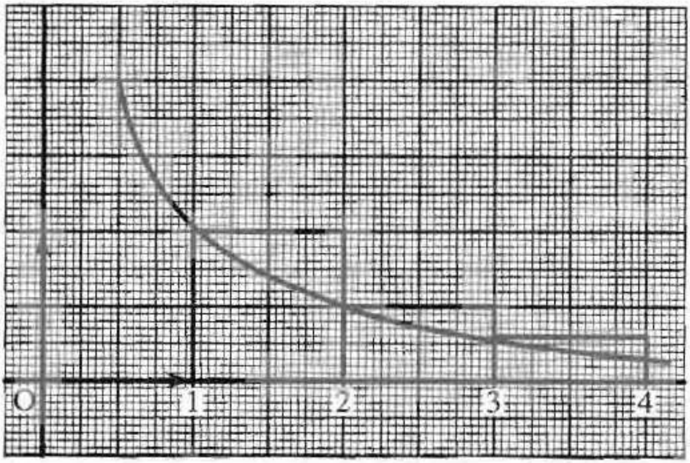
Enoncé 6

Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, et pour tout entier $n \geqslant 0$ et $e^x \geqslant \frac{x^n}{n\,!}$ en étudiant les fonctions f_n définies par $f_n(x) = e^x - \frac{x^n}{n\,!}$ (On admettra par convention que $0! = 1$)

Indication : pour comprendre ce qui se passe, on pourra commencer par étudier f_0, f_1, f_2.

Enoncé 7

La courbe sur la figure ci-contre est représentative de la fonction définie, pour $x > 0$ par $y = \frac{1}{x}$. En observant les rectangles du dessin, de quelle suite (u_n) peut-on démontrer la convergence ou la divergence ?



Énoncé 8

Un parallélogramme est inscrit dans un autre (c'est-à-dire si ses quatre sommets se trouvent respectivement sur les quatre côtés de l'autre). Quelle est la distance séparant les deux centres ?

A-t-on une propriété analogue pour un triangle équilatéral inscrit dans un triangle équilatéral ?

Enoncé 9

Quel est l'ensemble des points décrits par le centre d'un triangle équilatéral dont un sommet est fixe et un autre sommet décrit un cercle (Γ) ?

Que se passe-t-il pour un triangle quelconque dont les angles restent constants, dont un sommet est fixe et dont un autre sommet décrit un cercle ?