Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, cherche de « beaux problèmes »... si possible, trouver des solutions et les invite à donner libre cours à leur invention créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions. Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés.

Enoncés, réponses et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur des feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
21, rue Juliette Dodu
75010 PARIS

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ n° 270 (Miguel AMENGUAL COVAS, Majorque, Espagne)

Une pyramide régulière tronquée est telle que sa hauteur et le côté de sa plus grande base soient tous deux égaux à a. On suppose en outre que chacune de ses faces admet un cercle inscrit.

1 - Calculer le côté de sa plus petite base.

2 - Combien de côtés peuvent avoir les bases d'une telle pyramide ?

ÉNONCÉ n° 271 (Michel LAFOND, 21 - DIJON)

Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ l'équation : $a^2+b^2+c^2=n\,abc$.

ÉNONCÉ n° 272 (R. RAYNAUD, 04 - DIGNE)

Les deux demi-droites fixes (X) et (Y) ont même origine P et forment un angle aigu. La demi-droite (X) porte un point fixe A différent de P. Un cercle variable (O) de centre O est tangent en A à (X) et coupe (Y) en B et C.

Construire le triangle ABC de façon que son périmètre ait une longueur donnée $2p$.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ n° 249 (Gabriel FRAISSE, 11 - Ferrals les Corbières)

Quelle est la probabilité que, lors d'un tirage du Loto national (combinaison aléatoire de 6 numéros parmi 49), il y ait au moins deux numéros consécutifs parmi les 6 bons numéros ?

SOLUTION de Gérard GRANCHER (76 - Rouen)

Notons $(x_1, x_2, \dots x_6)$ un tirage de 6 numéros parmi $\{1, 2, \dots, 49\}$ ne contenant pas de numéros consécutifs avec $x_1 < x_2 < \dots < x_6$. A ce tirage, on peut associer de manière bijective le tirage de 6 numéros $(x_1, x_2 - 1, x_3 - 2 \dots x_6 - 5)$ parmi $\{1, 2, \dots, 44\}$. Le nombre de tirages ne comprenant pas de numéros consécutifs est donc égal au nombre de parties à 6 éléments d'un ensemble en contenant 44, et vaut $C_{44}^{6} = \dfrac{44!}{6!38!}$.

La probabilité qu'un tirage contienne au moins 2 numéros consécutifs vaut donc : $1 - \left(\dfrac{44!}{6!38!}\right)\left(\dfrac{49!}{6!43!}\right)^{-1} = 1 - \dfrac{44!43!}{49!38!} = \dfrac{22\,483}{45\,402} = 0,495\,198\,449\,4$.

AUTRES SOLUTIONS

Alain BAILLE (38 - Grenoble), Philippe BARDY (56 - Beignon), Alain BESSON (74 - St Julien en Genevois), Jean-François BILGOT (43-St Paulien), Pierre CARRIQUIRY (75 - Paris), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), François COULOIGNER (76 - Forges les Eaux), Joël CROISSANT (31 - Toulouse), Pierre DELHAY (59 - Aulny du Hainaut), Robert FERREOL (75 - Paris), Jean-Yves LE CADRE (35 - Rennes), Pierre-Yves LE CLOIREC (35 - Rennes), Marie-Christine LOMBARD (83 - Toulon), Pierre MANACH (56 - Lorient), René MANZONI (76 - Le Havre), Serge PAICHARD (53 - Laval), Denis PEPIN (55 - Verdun), Maurice PERROT (75 - Paris), M. PICHEREAU (16 - St Yrieix), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), Marc ROBLET (21 - Dijon), Michel TANGUY (29 - Quimper), et une solution fausse.

REMARQUES

L'énoncé n'était pas original, mais le résultat, que je ne connaissais pas, m'a semblé intéressant.

Plusieurs lecteurs (Philippe BARDY, François COULOIGNER, Pierre DELHAY, Serge PAICHARD, Marguerite PONCHAUX) signalent que c'est l'exercice 77, p. 281, de l'ouvrage de Terminale S de la collection TERRACHER (ou le n° 64 dans l'édition 1992 de TC-E citée par Serge PAICHARD).

Serge PAICHARD signale en outre un article de *Quadrature* n°13, Septembre-Octobre 1992, de Claude BOUZITAT et Gil PAGES, intitulé *Les jours se suivent, les boules aussi*, mais qui prend en compte le numéro complémentaire ; et même un article de notre *Bulletin* de Colette BLOCH (Poitiers), *Jouer au "Loto" en suivant Euler* ... J'ai dû remonter la revue jusqu'en 1979 pour le trouver (n° 318, p. 223) !

François COULOIGNER cite *l'Analyse combinatoire* de L. COMTET (PUF, Tome I, Théorème A, p. 31), Marie-Christine LOMBARD le *Précis de Mathématiques* (HEC-Bréal), Espaces probabilisés (ch. 2, p. 61, n° 215) et *Exercices commentés et résolus* (p. 22, n° 106). PICHEREAU l'a trouvé dans les *exercices corrigés de maths posés à l'oral des concours HEC et ESCP* de Christian LEBŒUF, Jean-Louis ROQUE, Jean GUIGAUD (Ellipse 1986). La solution utilise la "méthode des trous de Kaplansky analogue à celle utilisée pour dénombrer des applications croissantes en se ramenant au dénombrement d'applications strictement croissantes". Et Marie-Christine LOMBARD demande à ce sujet : qui est KAPLANSKY ?

Par ailleurs, cette méthode de KAPLANSKY est-elle différente de celle que Colette BLOCH attribue à EULER, en l'occurrence la méthode proposée ci-dessus ?

D'autres méthodes ont été utilisées par les lecteurs : Alain BESSON, Pierre CARRIQUIRY, Jean-Yves LE CADRE, Denis PEPIN et Michel TANGUY établissent que, si l'on appelle $S(n, p)$ le nombre de sous-ensembles de p éléments de $\{1, 2, \ldots n\}$ ne contenant pas deux éléments consécutifs, en distinguant ceux qui contiennent n et ceux qui ne contiennent pas n, on a :

$$S(n, p) = S(n-2, p-1) + S(n-1, p)$$

d'où le résulktat général par récurrence.

Marie-Laure CHAILLOUT, Pierre-Yves LE CLOIREC et PICHEREAU rapprochent cet exercice du problème classique : combien y a-t-il de k-uplets entiers strictement positifs dont la somme soit n ? Il s'agit en l'occurrence de 7 entiers : a_1, $a_2 - a_1 - 1$, $a_3 - a_2 - 1$, ... $a_6 - a_5 - 1$, $50 - a_6$ dont la somme est 45, si l'on appelle $a_1, a_2 \ldots a_6$ les numéros des six boules tirées.

Enfin, Joël CROISSANT, Pierre MANACH et René MANZONI s'aident d'un petit programme informatique.

Signalons aussi que diverses généralisations ont étré proposées : combien y a-t-il de tirages tels que la plus petite différence entre deux numéros voisins soit supérieure ou égale à k ? ... C'est d'ailleurs cet exercice 249 qui a inspiré à Marie-Laure CHAILLOUT l'énoncé 258, paru dans le n° 407 (décembre 1996) et dont la solution paraîtra, je l'espère, dans le numéro 415 (avril 1998 : j'essaie de combler le retard accumuilé et dont je prie les lecteurs de m'excuser).

ÉNONCÉ n° 250 (d'après les Olympiades Internationales 1993, Istanbul)

Montrer qu'il existe une infinité non dénombrable de fonctions f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant les trois conditions :

$$f(1) = 2$$

$$f(f(n)) = f(n) + n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

et $$f(n+1) > f(n) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

mais que, parmi elles, il en existe une paire et une seule $\{g, h\}$ telle que pour toute autre fonction f vérifiant ces trois mêmes relations,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f(n) = g(n) \text{ ou } f(n) = h(n).$$

SOLUTION

Appelons φ le nombre d'or $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ (la plus grande racine de $x^2 = x + 1$), et notons $[x]$ la partie entière du réel x.

Pour quelles valeurs de α la fonction $f(n) = [\varphi n + \alpha]$ vérifie-t-elle les trois conditions ? La première est vérifiée si $2 - \varphi \leqslant \alpha < 3 - \varphi$. La troisième est toujours vérifiée, car l'intervalle $]\varphi n + \alpha\ ,\ \varphi(n+1) + \alpha]$, de longueur $\varphi > 1$, contient nécessairement au moins un entier m tel que $f(n) < m \leqslant f(n+1)$.

Quant à la seconde, si l'on pose $u(n) = f(n) - \varphi n$,

$$f(f(n)) = [\varphi(\varphi n + u(n)) + \alpha]$$
$$= f(n) + n + [(\varphi - 1)u(n) + \alpha].$$

L'hypothèse $\alpha - 1 < u(n) \leqslant \alpha$ entraîne $0 \leqslant (\varphi - 1)u(n) + \alpha < 1$ dès lors que $1 - \dfrac{1}{\varphi} \leqslant \alpha < \dfrac{1}{\varphi}$.

Donc, pour tout $\alpha \in [1 - \dfrac{1}{\varphi}\ ;\ \dfrac{1}{\varphi}[$, la fonction $f(n) = [\varphi n + \alpha]$ vérifie les trois conditions de l'énoncé, et il y a une infinité non dénombrable de telles fonctions, car si α et β sont deux réels distincts, les fonctions $[\varphi n + \alpha]$ et $[\varphi n + \beta]$ sont distinctes.

C'est un résultat classique certes, mais qui ne va pas de soi. Il faut prouver qu'on peut toujours trouver un n pour lequel il existe un entier compris entre $\varphi n + \alpha$ et $\varphi n + \beta$, aussi proches que soient α et β. A partir du principe des tiroirs, on prouve que parmi les $N + 1$ entiers $\{0, 1, \ldots N\}$, il existe un q tel que $|q\varphi - [q\varphi]| < 1/N$, et si $1/N < |\alpha - \beta|$, parmi les $kq\varphi$, on peut en trouver un tel que $kq\varphi + \alpha$ et $kq\varphi + \beta$ n'aient pas la même partie entière.

Cela étant, il n'y a pas que les fonctions ci-dessus qui vérifient les trois conditions requises et nous n'avons résolu que la première question du problème.

Intéressons-nous de plus près à la fonction $u(n) = f(n) - \varphi n$. La seconde hypothèse, $f(f(n)) = f(n) + n$ entraîne : $u(f(n)) = -\dfrac{1}{\varphi}u(n)$ (1)

Par ailleurs, la fonction v définie, elle, par $v(n) = f(n) - n$ est croissante au sens large car $f(n+1) \geqslant f(n) + 1$, et elle est surjective car $\forall n,\ n = v(f(n))$. Donc $v(n+1)$ ne peut être égal qu'à $v(n)$ ou à $v(n) + 1$: s'il était plus grand, la valeur $v(n) + 1$ ne serait jamais atteinte par v. Il en résulte que $f(n+1)$ vaut nécessairement soit $f(n) + 1$ soit $f(n) + 2$, et dans les deux cas

$|u(n+1) - u(n)| \leqslant \dfrac{1}{\varphi}$ (2).

Or, le fait que $f(n+1)$ vaille $f(n) + 1$ ou $f(n) + 2$ entraîne que $f(f(n+1))$ vaut $f(f(n)) + 2$ ou $f(f(n)) + 3$, donc que parmi trois entiers consécutifs, l'un au moins peut s'écrire $f(f(n))$. Prouvons, à partir de là, que $\forall n,\ |u(n)| < 1$: par l'absurde, appelons m le plus petit entier tel que $|u(m)| \geqslant 1$ ($m \geqslant 4$ car les hypothèsers imposent $f(1) = 2$ donc $f(2) = 3$ et $f(3) = 5$, d'où $|u(1)| < 1$, $|u(2)| < 1$, $|u(3)| < 1$). L'un des trois entiers $m-1$, m, $m+1$ peut s'écrire $f(f(n))$, avec $n < m$ ($f(f(n)) = n + f(n) \geqslant n + 2$).

Comme, par hypothèse, $|u(n)| < 1$, d'après (1): $u(f(f(n))) < \dfrac{1}{\varphi^2}$.

Si $f(f(n)) = m$, l'hypothèse $|u(m)| \geqslant 1$ est clairement contredite, mais elle l'est également si $f(f(n)) = m - 1$ ou $m + 1$, car, d'après (2),

$|u(m) - u(m-1)| \leqslant \dfrac{1}{\varphi}$ tout comme $|u(m+1) - u(m)|$, or $\dfrac{1}{\varphi} + \dfrac{1}{\varphi^2} = 1$.

Il en résulte que pour tout n, $|f(n) - \varphi n| < 1$, donc $f(n)$ ne peut prendre que deux valeurs : $[\varphi n + 1]$ ou $[\varphi n]$.

Mais cela ne suffit pas! Nous n'avons pas déterminé les fonction g et h. Nous savons que les fonctions $[\varphi n + 1]$ et $[\varphi n]$ ne vérifient pas les trois conditions, donc ce ne sont pas les fonctions cherchées. En outre, si l'on appelle F_k le k-ième terme de la suite de Fibonacci ($F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$), il est clair par récurrence sur k que toute fonction vérifiant les hypothèses vérifie : $f(F_k) = F_{k+1}$ pour tout k : en certains points, donc, l'une des valeurs $[\varphi n + 1]$ ou $[\varphi n]$ ne peut jamais être prise.

Alors il nous faut deux astuces pour conclure : tout d'abord, si l'on appelle A_f l'ensemble des entiers tels que $f(n) = [\varphi n]$ et B_f l'ensemble des entiers tels que $f(n) = [\varphi n + 1]$, $n \in A_f \Leftrightarrow f(n) \in B_f$, quelle que soit la fonction f satisfaisant les hypothèses. En effet, si $u(n) = \varphi n - [\varphi n]$,

$$[\varphi[\varphi n] + 1] = (\varphi n - u(n)) + n + [1 - (\varphi - 1)u(n)]$$

et $$[\varphi[\varphi n + 1]] = (\varphi n - u(n)) + n + [\varphi - (\varphi - 1)u(n)].$$

Or, φ étant irrationnel, $0 < u(n) < 1$ ($u(n)$ ne peut pas être nul), donc $[1 - (\varphi - 1)u(n)] = 0$ et $[\varphi - (\varphi - 1)u(n)] = 1$. On a donc toujours :

$$[\varphi[\varphi n] + 1] = [\varphi n] + n \qquad \text{et} \qquad [\varphi[\varphi n + 1]] = [\varphi n + 1] + n \qquad (3)$$

Cette remarquable alternance nous incite à construire deux fonctions g et h définies par : $\forall k,\quad g(F_k) = h(F_k) = F_{k+1}$

et, pour tout n strictement compris entre F_k et F_{k+1}

$g(n) = [\varphi n]$ et $h(n) = [\varphi n + 1]$ si k pair

$g(n) = [\varphi n + 1]$ et $h(n) = [\varphi n]$ si k impair.

Les relations (3) que nous venons de démontrer prouvent que les fonctions g et h satisfont toutes les conditions de l'hypothèse, l'inégalité : $\varphi F_k + (1 - \varphi) < K_{k+1} < \varphi F_k + (\varphi - 1)$ étant toutefois nécessaire pour prouver que ces fonctions sont strictement croissantes :

on a en fait : $F_{k+1} = \varphi F_k + \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^k$ (si $F_1 = F_2 = 1$), ce qui se démontre très facilement par récurrence. En outre, toute fonction f vérifiant l'hypothèse est bien telle que pour tout n, $f(n) = g(n)$ ou $f(n) = h(n)$. $\{g, h\}$ est *une* paire cherchée. Est-ce la seule ?

C'est là qu'intervient l'autre astuce : supposons qu'il existe une autre paire $\{g', h'\}$. En quels points n peut-on avoir $g'(n) = h'(n)$? Seulement aux nombres de Fibonacci F_k, car si en un autre point $g'(n) = h'(n)$, l'un des nombres $g(n)$ ou $h(n)$ ne serait égal ni à $g'(n)$ ni à $h'(n)$, la paire $\{g', h'\}$ ne conviendrait donc pas.

Supposons que $g'(F_k + 1) < h'(F_k + 1)$. En quels points $n \in]F_k, F_{k+1}[$ a-t-on $g'(n) < h'(n)$? Tous! Sinon il existerait un plus petit n, $F_{k+2} \leqslant n \leqslant F_{k+1} - 1$, tel que cette inégalité soit mise en défaut. Or, si $g'(n-1) < h'(n-1)$, $g'(n) \leqslant h'(n)$ du fait que $g'(n) \leqslant g'(n-1) + 2$ et $h'(n) \geqslant h'(n-1) + 1$. Pour ce plus petit n, on aurait donc $g'(n) = h'(n)$, ce qui contredirait le résultat précédent. Dès lors, sur chacun des intervalles $]F_k, F_{k+1}[$ g' coïncide avec h ou g et h' coïncide avec l'autre fonction g ou h. Or, les relations d'alternance (3) prouvent que si g' coïncide avec g sur

$]F_k, F_{k+1}[$, elle ne peut pas coïncider avec h sur $]F_{k+1}, F_{k+2}[$, donc g' coïncide avec la même fonction g ou h sur tout $\mathbb{N}^*$, et h' coïncide avec l'autre fonction h ou g, d'où l'unicité de la paire ; ce qui achève la démonstration.

REMARQUES

L'énoncé 5 de l'Olympiade Internationale d'Istanbul (1993) demandait en fait de déterminer s'il existe une fonction f vérifiant les trois conditions et on peut en trouver de toutes sortes... la *Mathematical Association of America* propose par exemple : $f(n) = n + g(n)$ en posant $g(n) = \max\{k \mid 1 \leqslant k < n$ et $f(k) \leqslant n\}$. La connaissance de $f(1)...f(n-1)$ détermine $g(n)$ donc $f(n)$, qui est donc clairement défini par récurrence sur n.

C'est en approfondissant ce problème d'Olympiade que j'ai élaboré la démonstration et l'énoncé ci-dessus. L'originalité essentielle de cette démonstration est d'éclipser la notion de *choix* : j'ai reçu six solutions à cet énoncé, de Jacques BOUTELOUP (76 - Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), François COULOIGNER (76 - Forges les Eaux), Pierre DELHAY (59 - Aubry du Hainaut), René MANZONI (76 - Le Havre) et Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), qui toutes reposaient sur l'argumentation suivante : construire une fonction f satisfaisant l'hypothèse revient à choisir arbitrairement, pour tout entier n sans antécédent, $f(n)$ entre deux valeurs consécutives. Cette infinité de choix indépendants fournit donc une infinité non dénombrable de fonctions f.

Cette argumentation, parfaitement valable, pose un problème pour la suite de la démonstration, dans la mesure où les entiers sans antécédent ne sont pas les mêmes d'une fonction à l'autre. On peut, par exemple, à chacun des choix, prendre la plus grande des deux valeurs possibles. Mais la fonction ainsi définie ne sera pas la plus grande possible puisque, par exemple, nous aurons choisi $f(4) = 7$ et non 6, donc $f(7) = 11$, alors qu'on aurait pu avoir $f(7) = 12$. Elle ne sera pas non plus l'une des fonctions de l'unique paire $\{g, h\}$ cherchée.

Sans contester la validité des démonstrations reposant sur ces choix, je me suis efforcé d'appuyer la mienne sur une propriété universelle de toute fonction solution : le fait que $|f(n) - \varphi n| < 1$, ce qui évite de gérer cet arbitraire. D'ailleurs, François COULOIGNER me rejoint sur ce point, et sa dém-ponstration est en définitive très voisine de la mienne.

ÉNONCÉ n° 251 (G. CAMGUILHEM, 93 - Aubervilliers)

Soient A', B' et C' les pieds des hauteurs d'un triangle ABC et soient B'' et C'' les points définis par $\overrightarrow{A'B''} = k\,\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A'C''} = k\,\overrightarrow{A'B'}$ (pour k réel quelconque). Les droites *(BB")* et *(CC")* se coupent en *I*.

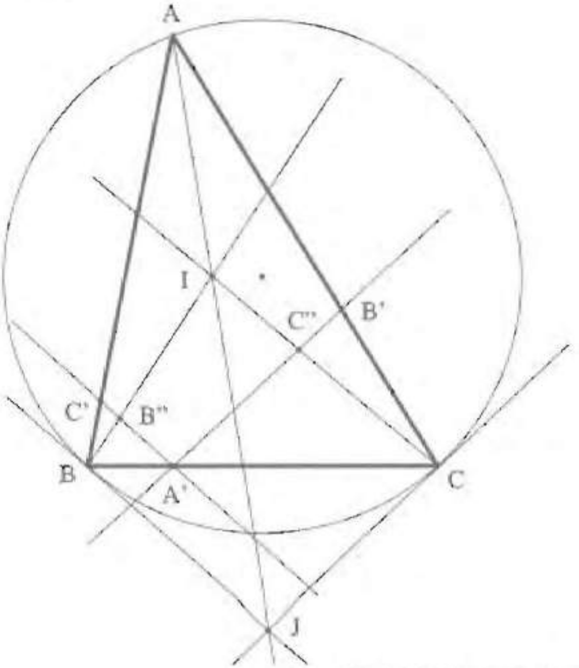
Quel est l'ensemble des points *I* lorsque *k* décrit IR?

SOLUTION de Grégoire PECOU (29 - Ile Tudy)

Les points *B"* et *C"* décrivent des divisions semblables (donc homographiques) sur *(A'C')* et *(A'B')*. Les rayons*(BB")* et *(CC")* sont donc liés homographiquement et leur intersection décrit donc une conique décomposée car, pour $k = 0$, à *(BA')* correspopnd *(CA')*. *I* décrit ainsi une droite qui passe par *A* ($k = 1$).

C'est la symédiane de *A*. Pour cela, il suffit de faire tendre *k* vers l'infini. *(BB")* tend alors vers la tangente au cercle *ABC* en *B* (antiparallélisme de *(A'C')* et *(AC)* par rapport à *(BA)* et *(BC)*) et *J* devient l'intersection *J* des tangentes en *B* et *C* à ce cercle. C' est un point de la symédiane.

Remarque : Quel que soit le triangle *A'B'C'* inscrit dans *ABC*, la construction précédente fournit toujours un point *I* qui décrit une droite passant par *A*. Si *A'*, *B'*, *C'* sont les pieds des médianes, c'est la médiane issue de *A*. Si *A'*, *B'*, *C'* sont les points de contact du cercle inscrit, c'est la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$.



AUTRES SOLUTIONS

Alain BAILLE (38 - Grenoble), Jacques BOUTELOUP (76 - Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), François COULOIGNER (76 - Forges les Eaux), Jacques DAUTREVAUX (06 - St André), Edgard DELPLANCHE (94 - Créteil), Christian DUFIS (87 - Limoges), Christine FENOGLIO (69 - Lyon), Jacques LEGRAND (64 - Biarritz), Marie-Christine LOMBARD (83 - Toulon), René MANZONI (76 - Le Havre), A. MARCOUT (10 - Ste Savine), Eric OSWALD (74 - Bonneville), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), R. RAYNAUD (04 - Digne), Jean THEOCLISTE (26 - Valence), André VIRICEL (54 - Villers lès Nancy) et une solution fausse.

REMARQUES

Suivant les connaissances auxquelles on fait appel, ce problème peut sembler plus ou moins immédiat, et diverses méthodes peuvent être utilisées. Concernant celle choisie ci-dessus, Christian DUFIS et G. CAMGUILHEM renvoient à l'ouvrage de DELTHEIL et CAIRE, *Compléments de Géométrie* (Gabay) et, concernant les propriétés de la symédiane, à celui d'Y. et R. SORTAIS, *La géométrie du triangle*, ainsi qu'aux *Exercices de géométrie* de F.G.M. (Gabay), th. 984, p. 1148.

On peut aussi déterminer l'équation de l'ensemble solution et prouver ainsi qu'il s'agit d'une droite : c'est ce qu'ont fait Marie-Laure CHAILLOUT, Marie-Christine LOMBARD, Marguerite PONCHAUX, Jean THEOCLISTE et André VIRICEL. Christine FENOGLIO et Eric OSWALD ont raisonné en coordonnées barycentriques.

On peut invoquer le théorème de Céva pour prouver que si (BB'') (resp. $(CC''))$ rencontre (AC) (resp. (AB)) en B_1 (resp. C_1), $\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}$ est indépendant de k, donc l'intersection A_1 de (AI) avec (BC) est fixe : c'est ce que proposent Alain BAILLE, René MANZONI, A. MARCOUT et André VIRICEL.

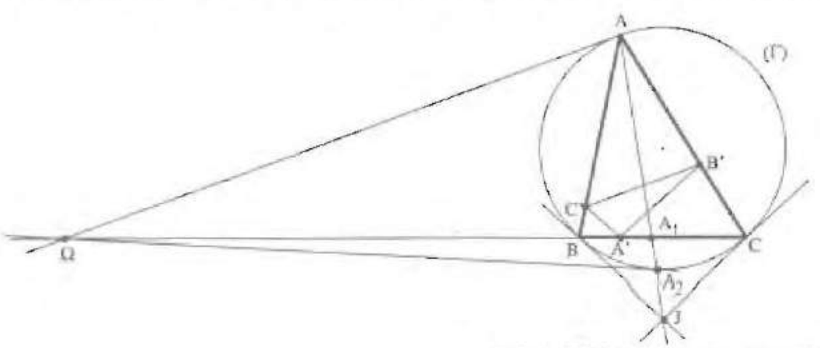
En se rapprochant de la méthode de Grégoire PECOU, (utilisée également par Jacques BOUTELOUP, Edgard DELPLANCHE, Raymond RAYNAUD), Jacques DAUTREVAUX et Jacques LEGRAND remarquent que, si l'on appelle J' l'intersection de la parallèle à $(A'C')$ passant par B et de la parallèle à $(A'B')$ passant par C, les faisceaux de droites (BC'), (BB''), (BA'), (BJ') d'une part, (CB'), (CC''), (CA'), (CJ') d'autre part, ont même birapport, ils coupent donc (AJ') en (A, I_B, A', J') et (A, I_C, A', J') ayant ce même birapport, d'où il résulte que : $I_B = I_C = I$.

Ce résultat, très général, est cité par Christian DUFIS comme un théorème (théorème II, p. 175, du Deltheil et Caire), que G. CAMGUILHEM énonce ainsi : si deux faisceaux de quatre droites *Oa*, *Ob*, *Oc*, *Od* et *O'a'*, *O'b'*, *O'c'* *O'd'*, situés dans un même plan ont des birapports égaux et un rayon *Oa* confondu avec son homologue *O'a'*, les points d'intersection *B*, *C*, *D* de *Ob* avec *O'b'*, de *Oc* avec *O'c'* et de *Od* avec *O'd'* sont en ligne droite.

Le fait que la parallèle (BJ') à $(A'C')$ passant par B soit précisément la tangente (BJ) en B au cercle circonscrit à ABC n'est nullement nécessaire dans le raisonnement ci-dessus, mais il permet de caractériser la droite (AJ). Ce parallélisme de la tangente et de $(A'C')$ provient du fait que A', C', A, C sont cocycliques : les angles de droites $(A'C')$, (AC') et $(A'C')$, (AC) sont égaux tout comme, pour la même raison, l'angle (BJ), (AB) est égal à (BC), (AC). C'est d'ailleurs la notion d'antiparallélisme mentionnée par plusieurs lecteurs.

Cela permet de voir que le problème posé est double : indépendamment du fait que A', B', C' sont les pieds des hauteurs (ils pourraient être quelconques sur (BC), (CA), (AB)), I décrit une droite passant par A, et plusieurs lecteurs l'ont signalé. Mais le fait que A', B' et C' sont les pieds des hauteurs permet de caractériser ladite droite comme étant la *symédiane* du triangle ABC issue de A, soit la symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice intérieure : la moitié des lecteurs l'ont remarqué.

Si l'on appelle A_1 le pied de cette symédiane, l'étude des triangles ABA_1 et ACA_1 montre classiquement que $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{\sin^2 \widehat{C}}{\sin^2 \widehat{B}}$. Or, la polaire de J par rapport au cercle (Γ) circonscrit à ABC est (BC) et la polaire de A est la tangente en A à (Γ). Ces deux droites se rencontrent en Ω, pôle de (AJ) par rapport à (Γ). Il en résulte que l'intersection de (AJ) avec (BC) est conjuguée



harmonique de Ω par rapport à B et C, c'est donc bien le pied de la symédiane car, dans la mesure où $\widehat{\Omega AB} = \widehat{ACB}$, $\dfrac{\Omega B}{\Omega C} = \dfrac{\sin^2 \widehat{C}}{\sin^2 \widehat{B}}$.

A. MARCOUT tire ce dernier résultat du fait que Ω est le milieu des pieds des bissectrices issues de A, le centre du cercle d'Apollonius. D'autre part, si l'on appelle A_2 le point où la symédiane (AA_1) recoupe le cercle (Γ), (ΩA_2) est tangente à (Γ).

Les quatre droites $(A\Omega)$, (AB), (AJ) et (AC) constituent dont un faisceau harmonique et coupent toute autre droite suivant une division harmonique. Notamment la droite $(B'C')$ qui, nous l'avons vu, est parallèle à (ΩA), ce qui rejette l'un des quatre points de la division harmonique à l'infini, et permet donc de conclure que la symédiane passe par le milieu de $[B'C']$. On peut même remarquer que pour $k = 1/2$, $(BB")$ et $(CC")$ sont les symédianes issues de B et de C, elles se coupent au point de Lemoine du triangle, qui appartient à la troisième symédiane - autre manière de prouver que la droite cherchée est bien la symédiane issue de A.

Edgard DELPLANCHE pousse le luxe jusqu'à calculer pour quelle valeur de k le point I est précisément le milieu de $[B'C']$: pour $k = \dfrac{1}{2}\left(1 + \text{cotg}\,\widehat{B}\ \text{cotg}\,\widehat{C}\right)$. Parmi les divers prolongements du problème qu'il envisage, citons le fait que, si H est l'orthocentre de ABC, le même problème posé sur le triangle HBC montre que $(BC")$ et $(CB")$ se coupent sur la symédiane de HBC issue de H.

Le cas où ABC est rectangle a souvent été étudié séparément : s'il est rectangle en A, pas de problème, le résultat demeure, mais $B' = C' = A$ entraîne que la symédiane solution est la hauteur (AA'), le point de Lemoine étant le milieu de $[AA']$. Si le triangle est rectangle en B (resp. C), plus de problème : le problème ne se pose plus, il n'a plus de sens puisque $A' = C' = B = B"$ (resp. $A' = B' = C = C"$), la droite $(BB")$ (resp. $(CC")$) n'est plus définie.

Il convenait aussi, la plupart des lecteurs l'ont fait, de préciser si le lieu de I était toute la symédiane. Si je prends un point I quelconque sur cette symédiane, je définis deux faisceaux : (BA), (BI), (BC), (BJ')) et ((CA), (CI), (CB), (CJ')) de même birapport, ce qui entraîne que les intersections $B" = (BI) \cap (A'C')$ et $C" = (CI) \cap (B'C')$ vérifient bien les hypothèses. Sous réserve que ces intersections existent, et il conviendra éventuellement, si l'on ne raisonne pas en géométrie projective et qu'on exclut dons la valeur $k = \infty$, d'exclure de la droite solution le point $J = J'$. Tout comme pour $k = 0$, le point A_1 pose problème : *(BB")* et *(CC")* sont alors confondues et on ne peut pas parler de leur point d'intersection.

Quoi qu'il en soit, ce problème doit logiquement être envisagé comme un problème de géométrie projective. Et François COULOIGNER ne s'en est pas privé : transformant la figure par une homographie qui envoie la droite *(BC)* à l'infini, il appelle R l'image, par cette homographie, du point à l'infini de *(B'C')*, donc de *(B"C")*. *(C"A')* et *(B"A')* devenant alors parallèles, $C"$ est l'image de $B"$ par une homothétie h de centre R, et I est l'image de $B"$ par l'affinité d'axe *(RC)*, de direction *(RB)* et de même rapport que l'homothétie h. Ainsi, quand $B"$ parcourt la droite *(C'A')*, I parcourt l'image de *(C'A')* par cette affinité : l'ensemble des points I est une droite, image par l'homographie d'une droite de la figure initiale.

Terminons par une démonstration non moins sophistiquée, due à Jacques DAUTREVAUX : *(BB")* et *(CC")* recoupent le cercle en B_2 et C_2 respectivement. Il existe sur le cercle (Γ) une homographie transformant B en C et C en B, A en A, B_2 en C_2, et elle est manifestement involutive. Le théorème de Frégier permet d'en conclure que (B_2C_2) passe par Ω (peut-on atteindre ce résultat plus simplement ?). Il en résulte que $I = (BB_2) \cap (CC_2)$ appartient à la polaire de Ω par rapport au cercle (Γ).