Etude de la loi de probabilité de la variable aléatoire quotient de deux variables gaussiennes indépendantes

Marcel Jay - Paul-Louis Hennequin

Introduction

Dans la pratique statistique, parmi les opérations simples sur les variables aléatoires normales, on utilise souvent une combinaison linéaire de variables gaussiennes qui est encore une variable gaussienne ou une somme de carrés de variables normales centrées réduites indépendantes qui suit une loi de χ^2 intervenant fréquemment dans les tests.

Plus rarement on s'intéresse au quotient de deux variables aléatoires gaussiennes, pour lequel on utilise surtout des formules d'approximation. Lors d'une étude technique de ressorts hélicoïdaux, le rapport d'enroulement (quotient du diamètre moyen d'enroulement par le diamètre du fil) a fourni une occasion de pousser plus avant l'étude théorique de la loi de probabilité du quotient de deux variables gaussiennes indépendantes. C'est cette étude théorique qui est présentée dans cet article.

Notations

X_1 suit une loi $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ normale de moyenne m_1, de variance σ_1^2,

X_2 suit une loi $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$.

X_1 et X_2 sont indépendantes. On posera $a_1 = \dfrac{m_1}{\sigma_1}$ et $a_2 = \dfrac{m_2}{\sigma_2}$. On notera, comme d'habitude, $F_Z(z)$ la fonction de répartition Prob $(Z < z)$ d'une variable aléatoire Z et $f_Z(z) = \dfrac{dF_Z}{dz}$ la densité de probabilité de Z, avec $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)\,dt$.

Rappel

On sait que si X_1 et X_2 sont centrées réduites, ($m_1 = m_2 = 0$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$), la variable aléatoire $U = \dfrac{X_1}{X_2}$ suit une loi de Cauchy, avec

$F_U(u) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} + \text{Arct u}\right)$ et $f_U(u) = \dfrac{1}{\pi\left(1 + u^2\right)}$. Aucun moment d'ordre $m \geqslant 1$ de U n'existe, on peut seulement définir une "espérance en valeur principale" au sens de Cauchy que nous noterons $E^*(U)$:

$$E^*(U) = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} \frac{u}{\pi\left(1 + u^2\right)}\,du = 0.$$

On veut généraliser ces résultats à des valeurs quelconques de $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$.

Etude de la variable aléatoire $Y = 1/X$ où X suit $\mathcal{N}(m, \sigma)$

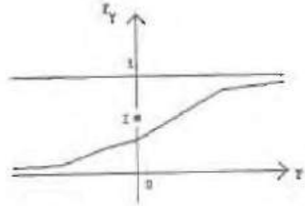
Si $\sigma = 0$, on a $Y = 1/m$ avec probabilité 1 ; si $\sigma \neq 0$, on notera $a = m / \sigma$.

On sait que $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$.

a) Fonction de répartition de Y

$F_Y(y) = \text{Prob}\left(\dfrac{1}{X} < y\right)$

$$\left|\begin{array}{ll} = \text{Prob}\left(X > \frac{1}{y}\right) + \text{Prob}\,(X < 0) = 1 - \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{1/y} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx, & \text{si } y > 0, \\ = \text{Prob}\,(X < 0) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx, & \text{si } y = 0, \\ = \text{Prob}\left(\frac{1}{y} < X < 0\right) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{1/y}^{0} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx, & \text{si } y < 0. \end{array}\right.$$



Le changement de variable $x = m + \sigma t$ dans les intégrales avec l'aide d'une table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite permet de tracer le graphe de F_Y. En particulier

$$F_Y(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-a} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Pour des valeurs opposées de a (ou de m) les graphes obtenus sont symétriques par rapport au point I (0, 1/2).

Si l'on suppose $a > 0$ par exemple, la médiane μ de Y définie par $F_Y(\mu) = 1/2$ est donnée par l'équation

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{-a+1/\sigma\mu} e^{-t^2/2}\,dt \quad \text{car } \mu > 0 \text{ puisque } F_Y(0) < 1/2.$$

b) Densité de Y

$$f_Y(y) = \frac{d\,F_Y(y)}{dy} = \frac{1}{y^2\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(1/y-m)^2/2\sigma^2}, \ \forall\, y \in \mathbb{R}$$

On voit que $f_Y(y) \sim \dfrac{1}{y^2\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-a^2/2}$ lorsque $|y| \to \infty$.

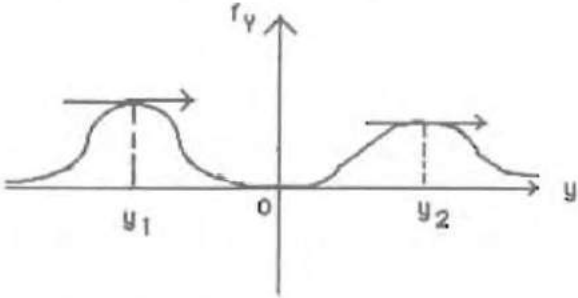
On peut calculer

$$f'_Y(y) = \frac{1}{y^4\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(1/y-m)^2/2\sigma^2}\left[\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{y}-m\right)-2y\right]$$

$f'_Y(y) = 0$, pour $y = 0$ et pour :

$$y_1 = \left(-m-\sqrt{m^2+8\sigma^2}\right)\Big/4\sigma^2$$

$$y_2 = \left(-m+\sqrt{m^2+8\sigma^2}\right)\Big/4\sigma^2$$



La distribution de Y est donc bimodale.

Elle est symétrique dans le cas où $m = 0$. Alors $f_Y(y)$ est paire :

$$f_Y(y) = \frac{1}{y^2\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-1/2y^2\sigma^2} \text{ et } y_2 = -y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2\sigma}.$$

Dans ce cas, $\mu = 0$ et le graphe de F_Y passe par I.

c) Espérance de Y

$\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy$ n'existe pas car $y\, f_Y(y) \sim \dfrac{1}{y\,\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-a^2/2}$ lorsque $|y| \to \infty$

On peut cependant calculer la valeur principale au sens de Cauchy de l'intégrale précédente et l'on aura

$$E^*(Y) = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{+A} \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi y}}\, e^{-(1/y-m)^2/2\sigma^2} dy.$$

Or

$$\int_{-A}^{+A} e^{-(1/y-m)^2/2\sigma^2}\frac{dy}{y} = \int_0^A \left(e^{-(1/y-m)^2/2\sigma^2} - e^{-(1/y+m)^2/2\sigma^2}\right)\frac{dy}{y}$$

$$= e^{-m^2/2\sigma^2}\int_0^A e^{-1/2\sigma^2 y^2}\left(e^{m/\sigma^2 y} - e^{-m/\sigma^2 y}\right)\frac{dy}{y}$$

$$= 2e^{-m^2/2\sigma^2}\int_0^A e^{-1/2\sigma^2 y^2}\, sh\,\frac{m}{\sigma^2 y}\,\frac{dy}{y}$$

La fonction à intégrer étant de signe constant (celui de m) et équivalente à $\frac{m}{\sigma^2 y^2}$ quand $y \to +\infty$ est intégrable sur $[0, +\infty]$ et

$$E^*(Y) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-m^2/2\sigma^2}\int_0^{\infty} e^{-1/2\sigma^2 y^2}\, sh\,\frac{m}{\sigma^2 y}\,\frac{dy}{y}\,,$$

$$E^*(Y) = \frac{1}{m}\,\frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-a^2/2}\int_0^{+\infty} e^{-v^2/2}\,\frac{sh\,(av)}{v}\,dv.$$

Dans le cas où $m = 0$, $f_Y(y)$ est paire et on voit tout de suite que $E^*(Y) = 0$.

Remarque 1

On aurait pu aussi obtenir $E^*(Y)$ à partir de la loi de X.

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx$$

n'existe pas mais

$$E^*\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{x}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx$$

existe :

$$E^*\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{+\infty}^{\varepsilon}\frac{1}{x}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x+m)^2/2\sigma^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{x}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx,$$

$$E^*\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+m^2)/2\sigma^2}\left(e^{mx/\sigma^2} - e^{-mx/\sigma^2}\right)\frac{dx}{x},$$

on retrouve le calcul précédent.

$$E^*\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{m}\cdot\frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-a^2/2}\int_0^{+\infty} e^{-v^2/2}\ \frac{sh\,(av)}{v}\,dv.$$

Remarque 2

Pour exploiter numériquement la formule précedente, on peut simplifier l'écriture de la fonction :

$\theta\,(a) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-v^2/2}\ \frac{sh\,(av)}{v}\,dv$, en remarquant que :

$$\theta\,'(a) = \int_0^{\infty} e^{-v^2/2}\ ch\,(av)\,dv = \left[e^{-v^2/2}\frac{sh\,(av)}{a}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} v e^{-v^2/2}\ \frac{sh\,(av)}{a}\,dv$$

$$\theta\,'(a) = \int_0^{\infty} v e^{-v^2/2}\ \frac{sh\,(av)}{a}\,dv \quad \text{et que } \theta\,''(a) = \int_0^{\infty} v e^{-v^2/2}\ \frac{sh\,(av)}{a}\,dv,$$

les dérivations sous le signe $\displaystyle\int_0^{\infty}$ étant permises.

Remarquant que $\theta''(a) = a\,\theta'(a)$ avec $\theta'(0) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-v^2/2}dv = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$, il en résulte que $\theta'(a) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\, e^{a^2/2}$.

Comme $\theta\,(0) = 0$, il vient alors $\theta\,(a) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\displaystyle\int_0^{a} e^{t^2/2}\,dt$.

D'où finalement :

$$E^*(Y) = \frac{1}{m}\, a e^{-a^2/2}\int_0^{a} e^{t^2/2}\,dt$$

on peut vérifier sur cette expression que, quand $\sigma \to 0$ (donc $a \to \infty$), $E^*(Y) \to 1/m$.

Pour cela on remarque que

$$e^{-a^2/2}\, e^{t^2/2} = e^{(t-a)(t+a)/2}$$

d'où, en posant $t - a = -v/a$, $a\,dt = -\,dv$ et

$$ae^{-a^2/2}\int_0^a e^{t^2/2}\,dt = \int_0^{a^2} e^{-v} e^{v^2/2a^2}\,dv.$$

Sur l'intervalle $[0, a^2]$ on a

$$-\frac{v}{2} + \frac{v^2}{2a^2} = \frac{v}{2}\left[\frac{v}{a^2} - 1\right] \leqslant 0$$

donc

$$e^{-v + v^2/2a^2} \leqslant e^{-v/2}$$

qui est intégrable sur $[0,\infty[$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et

$$\lim_{a\to\infty} ae^{-a^2/2}\int_0^a e^{t^2/2}\,dt = \int_0^\infty \lim_{a\to\infty} e^{-v} e^{v^2/2a^2}\,dv = \int_0^\infty e^{-v}\,dv = 1$$

On peut aussi noter que $E^*(Y)$ est développable en série entière de a, le résultat étant assez simple :

$$E^*(Y) = \frac{1}{m}\,.\,a\left(\sum_0^\infty \frac{(-1)^n a^{2n}}{2^n n!}\right)\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{a^{2n+1}}{2^n n!\,(2n+1)}\right)$$

$$E^*(Y) = \frac{1}{m}\,.\,a^2.\left(1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n a^{2n}}{1.3.5\ldots(2n+1)}\right).$$

Etude de la variable aléatoire $U = X_1 / X_2$

b) Densité de U

La densité du vecteur $\vec{V}(X_1, X_2)$ est

$$f_{\vec{V}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\, e^{-1/2\left((x_1 - m_1)^2/\sigma_1^2 + (x_2 - m_2)^2/\sigma_2^2\right)}.$$

On effectue le changement de variables

$$\begin{cases} X_1 = U.V \\ X_2 = V \end{cases} \text{ de jacobien } |J| = \left\| \begin{matrix} v & u \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = |v|$$

D'où la densité du vecteur $\overrightarrow{W}(U, V)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{|v|}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-1/2\left((uv - m_1)^2/\sigma_1^2 + (v - m_2)^2/\sigma_2^2\right)} = f_{\overrightarrow{W}}(u, v),$$

puis celle de la variable U :

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\overrightarrow{W}}(u, v)\, dv = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} |v|\, e^{-1/2(\alpha^2 v^2 - 2\beta v + \gamma)} dv,$$

où l'on a posé : $\alpha^2 = \dfrac{u^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{1}{\sigma_2^2}$, $\beta = \dfrac{m_1 u}{\sigma_1^2} + \dfrac{m_2}{\sigma_2^2}$, $\gamma = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$;

$$f_U(u) = e^{-\gamma/2}/2\pi\sigma_1\sigma_2 \left[\int_{-\infty}^{0} -v\, e^{-1/2(\alpha^2 v^2 - 2\beta v)} dv + \int_0^{+\infty} v\, e^{-1/2(\alpha^2 v^2 - 2\beta v)} dv\right]$$

soit, en regroupant les deux intégrales :

$$f_U(u) = e^{-\gamma/2}/\pi\sigma_1\sigma_2 \int_0^{+\infty} v e^{-\alpha^2 v^2/2} ch\,(\beta v)\, dv,$$

soit :

$$f_U(u) = e^{-\gamma/2}/\pi\sigma_1\sigma_2\alpha^2 \int_0^{+\infty} t\, e^{-t^2/2}\, ch\left(\frac{\beta}{\alpha} t\right) dt, \text{ avec } \alpha = \sqrt{\sigma_2^2 u^2 + \sigma_1^2}\Big/\sigma_1\sigma_2$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\pi\sigma_1\sigma_2\alpha^2 e^{\gamma/2} f_U(u) = \left[-e^{-t^2/2}\, ch\left(\frac{\beta}{\alpha} t\right)\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} -e^{-t^2/2}\, sh\left(\frac{\beta}{\alpha} t\right)\frac{\beta}{\alpha}\, dt.$$

$$\pi\sigma_1\sigma_2\alpha^2 e^{\gamma/2} f_U(u) = 1 + \frac{\beta}{\alpha}\varphi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \text{ en posant } \varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-t^2/2}\, sh\,(\lambda t)\, dt.$$

On peut simplifier l'écriture de φ :

$$\varphi'(\lambda) = \int_0^{\infty} t e^{-t^2/2} ch\,(\lambda t)\, dt \text{ (dérivation permise sous } \int_0^{\infty} \text{)}.$$

Donc

$$\varphi'(\lambda) = \pi\sigma_1\sigma_2 e^{\gamma/2}\alpha^2 f_U(u) = 1 + \lambda\varphi(\lambda)$$

équation différentielle linéaire du premier ordre dont la solution cherchée est ici : $\varphi(\lambda) = e^{\lambda^2/2}\int_0^{\lambda} e^{-t^2/2}dt$, puisque $\varphi(0) = 0$.

Finalement :

$$f_U(u) = \frac{e^{-\gamma/2}}{\pi\sigma_1\sigma_2\alpha^2}\left(1 + \lambda e^{\lambda^2/2}\int_0^{\lambda} e^{-t^2/2}dt\right),$$

où :

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{a_1\sigma_2 u + a_2\sigma_1}{\left(\sigma_2^2 u^2 + \sigma_1^2\right)^{1/2}}.$$

On peut remarquer que $1 + \lambda\varphi(\lambda)$ est développable en série entière de λ, le résultat étant très voisin de l'expression de $E^*(Y)$ trouvée précédemment en fonction de a.

$$\pi\sigma_1\sigma_2 e^{\gamma/2}\alpha^2 f_U(u) = 1 + \lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2n}}{2^n n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^{2n+1}}{2^n n!\,(2n+1)}\right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2n}}{1.3.\ldots(2n-1)},$$

$\alpha^2 f_U(u)$ est une fonction paire de λ.

Les courbes densité de U, graphes de f_U sont difficiles à étudier dans le cas général. On peut cependant faire quelques remarques simples :

- Les courbes densité de U dépendant en fait de trois paramètres par exemple a_1, a_2 et $r = \sigma_1/\sigma_2$:

$$f_U(u) = \frac{e^{-(a_1^2+a_2^2)/2}\,r}{\pi\left(u^2+r^2\right)}\left(1 + \lambda\varphi(\lambda)\right) \text{ avec } \lambda = \frac{a_1 u + a_2 r}{\left(u^2+r^2\right)^{1/2}}.$$

- Si $a_1 = 0$ ou si $a_2 = 0$, l'une au moins des variables X_1 et X_2 est centrée, et $f_U(u)$ est une fonction paire de u.

Dans le cas où $a_1 = a_2 = 0$, $f_U(u) = \dfrac{r}{\pi\left(u^2+r^2\right)}$ et la variable $Z = U/r$ suit la loi de Cauchy : $f_Z(z) = \dfrac{1}{\pi\left(1+z^2\right)}$.

- Lorsque $|u| \to \infty$, $f_U(u) \sim \dfrac{e^{-(a_1^2+a_2^2)/2}.r}{\pi u^2}(1 + a_1\,\varphi(a_1))$.

- On peut vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(u)\,du = 1$ en utilisant le développement en série entière absolument et uniformément convergent en u :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(u)\,du = \frac{re^{-(a_1^2+a_2^2)/2}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2+r^2}\sum_0^\infty \frac{(a_1u+a_2r)^{2n}}{(u^2+r^2)^n\;1.3.5\ldots(2n-1)}\,du$$

$$= \frac{re^{-(a_1^2+a_2^2)/2}}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(a_1u+a_2r)^{2n}}{(u^2+r^2)^{n+1}\;1.3\ldots(2n-1)}\,du$$

Le changement classique $u = rtg\varphi$ ramène au calcul des intégrales :

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}(a_1\ \sin\varphi + a_2\ \cos\varphi)^{2n}\,d\varphi = \pi\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{2}\right)^n\frac{1.3\ldots(2n-1)}{n!}$$

comme on peut le voir en utilisant une définition de la fonction eulérienne :

$B(p,\,q) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\,\cos^{2q-1}\theta\,d\theta.$

b) Espérance de U

$E(U) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u\,f_U(u)\,du$ n'existe pas, mais on peut définir :

$$E^*(U) = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{+A} u\,f_U(u)\,du.$$

soit $$E^*(U) = \lim_{A\to\infty}\frac{re^{-(a_1^2+a_2^2)/2}}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\int_{-A}^{+A}\frac{u(a_1u+a_2r)^{2n}}{(u^2+r^2)^{n+1}\;1.3.5\ldots(2n-1)}\,du.$$

En se limitant aux termes pairs et en posant $u = rtg\varphi$, on aura :

$$E^*(U) = \frac{2r\,e^{-(a_1^2+a_2^2)/2}}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\frac{c_n}{1.3.5\ldots(2n-1)},$$

avec :

$$c_n = \int_0^{\pi/2} \left(a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi\right)^{2n} tg\varphi \, d\varphi.$$

En utilisant encore les fonctions eulériennes, on trouve :

$$c_n = \pi \frac{a_1}{a_2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{2(n-k)-1} C_n^k \left(\frac{a_1^2}{2}\right)^k \left(\frac{a_2^2}{2}\right)^{n-k} 1.3.5\ldots(2n-1).$$

Finalement, l'expresssion de $E^*(U)$ peut s'écrire :

$$E^*(U) = \frac{m_1}{m_2} a_2^2 e^{-\left(a_1^2+a_2^2\right)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{2(n-k)-1} C_n^k \left(\frac{a_1^2}{2}\right)^k \left(\frac{a_2^2}{2}\right)^{n-k-1} \right).$$

ce qui ne semble pas très commode pour une utilisation numérique...

On peut se demander, X_1 et X_2 étant indépendantes, si :

$$E^*(U) = E^*\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = E(X_1) \,.\, E^*\left(\frac{1}{X_2}\right)$$

la réponse est OUI.

Il suffit de vérifier, compte tenu de l'expression trouvée précédemment de $E^*(1/Y)$, l'égalité suivante :

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_2^{2n}}{1.3.5\ldots(2n-1)} =$$

$$e^{-\left(a_1^2+a_2^2\right)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{2(n-k)-1} C_n^k \left(\frac{a_1^2}{2}\right)^k \left(\frac{a_2^2}{2}\right)^{n-k-1} \right)$$

L'identification de ces deux séries entières en a_2 (calculs un peu longs...) permet de voir que a_1 disparaît de la série du second membre. Le résultat final est donc :

$$E^*(U) = \frac{m_1}{m_2} a_2^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_2^{2n}}{1.3.5\ldots(2n-1)} \right).$$

On peut, du reste, se demander à quelles conditions plus générales sur deux variables aléatoires X_1 et X_2, de densités respectives $f_1(x_1)$ et $f_2(x_2)$ définies sur $\mathbb{R}$, on peut écrire :

$$E^*\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = E(X_1) \,.\, E^*\left(\frac{1}{X_2}\right) \; X_1 \text{ et } X_2 \text{ étant indépendantes.}$$

Une situation simple où il en est ainsi est la suivante :

condition 1 : $\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1| f_1(x_1)\, dx_1 < +\infty$

condition 2 : $f_2(x_2)$ satisfait à une condition de Lipschitz au voisinage de 0 :

$$\exists\, M > 0 \text{ tel que } \left| f_2(x_2') - f_2(x_2'') \right| \leq M \left| x_2' - x_2'' \right|$$

pour tout couple x_2', x_2'' situé dans un intervalle centré en 0.

En effet, on sait que : $E^*\left(\dfrac{X_1}{X_2}\right) = \lim\limits_{\alpha \to 0} \iint_{|x_2| > \alpha} \dfrac{x_1}{x_2} f_1(x_1) f_2(x_2)\, dx_1\, dx_2$

avec $\alpha > 0$, soit :

$$E^*\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = \lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{\alpha}^{+\infty} x_1 f_1(x_1) \,.\, \frac{f_2(x_2) - f_2(-x_2)}{x_2}\, dx_2 \,.$$

D'après les conditions 1 et 2, le théorème de Fubini s'applique et on peut écrire

$$E^*\left(\frac{X_1}{X_2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_1(x_1)\, dx_1 \,.\int_0^{+\infty} \frac{f_2(x_2) - f_2(-x_2)}{x_2}\, dx_2 \,,$$

c'est-à-dire $E^*\left(\dfrac{X_1}{X_2}\right) = E(X_1)\,.\, E^*\left(\dfrac{1}{X_2}\right)$.

On voit facilement que, dans le cas qui nous occupe :

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}}\, e^{-(x_1 - m_1)^2 / 2\sigma_1^2} \; et \; f_2(x_2) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}}\, e^{-(x_2 - m_2)^2 / 2\sigma_2^2} \,,$$

les deux conditions 1) et 2) sont satisfaites.

Terminons par quelques remarques simples :

- L'expression de $E^*(U)$ dépend de trois paramètres m_1, m_2, σ_2 ; $E^*(U)$ est indépendante de σ_1, ce qui paraît logique.
- Dans le cas où m_1 ou bien m_2 est nul, $E^*(U) = 0$, ce qui est conforme avec le fait que $f_U(u)$ soit paire dans ces cas-là.
- Il peut être intéressant de tabuler la fonction paire

$$M(z) = z e^{-z^2/2} \int_0^z e^{t^2/2}\, dt = z^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{1.3.5\ldots(2n-1)} \right)$$

$E^*(U) = M(a_2)$ lorsque X_1 et X_2 ont des moyennes égales.

$E^*(U) = \frac{m_1}{m_2} M(a_2)$ dans le cas général.

- On peut se demander si E^*, qui prolonge E sur une classe de variables aléatoires plus large que les variables intégrables, a ses propriétés :

$$E^*(aX + b) = aE^*(X) + b,$$
$$E^*(X + Y) = E^*(X) + E^*(Y),$$

et, pour X et Y indépendantes, $E^*(XY) = E^*(X)E^*(Y)$.

Sans développer les calculs et en se limitant au cas où X possède une densité f, on voit qu'une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi est que, pour tout b réel,

$$(C) \qquad \lim_{A \to \infty} \int_A^{A+b} x\, f(x)\, dx = 0 \quad et \quad \lim_{A \to -\infty} \int_{-A}^{-A+b} x\, f(x)\, dx = 0$$

Or $E^*(X)$ peut très bien exister sans que cette condition soit satisfaite comme le montre l'exemple suivant :
la densité f est paire (ce qui entraîne l'existence et la nullité de $E^*(X)$ et

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \ 1_{[2^n, 2^n + 1/n]}(x)$$

où :

- les a_n sont strictement positifs,
- $\sum_1^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$ pour que f soit une densité,
- $\lim_{n \to \infty} 2^n a_n = \infty$ (par exemple $a_n = \frac{3}{n^2 \pi^2}$)

et où $1_{[2^n, 2^n + 1/n]}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $\left[2^n, 2^n + \frac{1}{n}\right]$.

Pour $A = 2^n$ et $b > 1/n$ (donc $n > 1/b$), on a :

$$\int_A^{A+b} x\, f(x)\, dx \geq \int_{2^n}^{2^n + 1/n} x\, f(x)\, dx > 2^n a_n$$

et la condition (C) n'est pas satisfaite.

Par contre, cette condition est satisfaite par les densités rencontrées dans cet article.

- On peut se poser le problème de l'estimation des paramètres qui figurent dans la loi de U.

On sait, depuis Kolmogorov que, si X est une variable aléatoire et $(X_1, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires indépendantes de même loi que X ("échantillon"), la "moyenne empirique" $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i$, converge presque sûrement vers une limite m si et seulement si l'espérance mathématique $E(X)$ existe et est égale à m.

Par exemple, si X suit une loi de Cauchy, $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i$ ne converge pas, même en probabilité, car il faudrait pour cela que la fonction caractéristique de X ($t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx$) soit dérivable à l'origine or c'est la fonction $t \mapsto e^{-|t|}$.

Pour estimer les paramètres de la loi de U, on peut envisager d'utiliser des quantiles (quartiles, médianes). On a en effet la convergence presque sûre des quantiles empiriques vers ceux de X dès que la fonction de répartition de X est continue. Ceci amène à évaluer les quantiles de U et pourrait constituer l'objet d'une autre étude.