Avis de recherche

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point d'histoire, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.

Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet et votre nom sur chacune et, si possible, une disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour immédiat) à

Robert FERRÉOL
6, rue des annelets
75019 Paris

Ou à l'adresse internet du lycée d'Enghien :
cabout@sancerre.ac-idf.jussieu.fr

NOUVEAUX AVIS DE RECHERCHE

Avis de recherche n° 84 de R. Ferréol

Problème des bœufs de Newton : "Sachant que n_1 (=75) bœufs ont brouté en t_1 (= 12) jours l'herbe d'un pré de s_1 (= 60) ares, et que n_2 (= 81) bœufs ont brouté en t_2 (= 15) jours l'herbe d'un pré de s_2 (= 72) ares, on demande le nombre n_3 de bœufs nécessaire pour brouter en t_3 (= 18) jours l'herbe d'un pré de s_3 (= 96) ares. On suppose que, dans les trois prés, l'herbe est à la même hauteur au moment de l'entrée des bœufs et qu'elle continue à croître uniformément depuis leur entrée."

La réponse donnée dans les livres conduit à la relation :

$\frac{n_1 t_1}{s_1}(t_2 - t_3) + \frac{n_2 t_2}{s_2}(t_3 - t_1) + \frac{n_3 t_3}{s_3}(t_1 - t_2) = 0$, ce qui donne $n_3 = 100$.

Mais j'ai construit deux modèles, l'un continu, l'autre discret, qui conduisent, l'un à $n_3 = 100{,}56$ et l'autre à $n_3 = 98{,}82\ldots$ Qu'en pensez-vous ?

Avis de recherche n° 85 de Marc Royer (Montélimar)

Etant donnée une fonction f, existe-t-il des fonctions g telles que $f = g \circ g$? Comment construire leur graphe à partir de celui de f ?

Avis de recherche n° 86 de Marc Royer

Existe-t-il des polyèdres convexes ayant 7 arêtes ?

RÉPONSES AUX AVIS PRÉCÉDENTS

Avis de recherche n° 72 : véritable raison de l'absence de Prix Nobel en mathématiques

Pascal Michel (Paris) m'a envoyé copie de deux articles :

- The American Monthly, Vol. 91, No 6, 1984, p. 382
- The Mathematical intelligencer, Vol. 7, No 3, 1985, p. 73-74,

qui placent la fameuse rivalité entre Nobel et Mittag-Leffler au rang de légende (voir *Bulletin 411*). Il semble tout simplement que Nobel ait proposé des prix pour les domaines qui l'intéressaient, et les mathématiques n'en faisaient pas partie.

Pascal Michel lance maintenant un avis de recherche sur l'origine de cette rumeur !

Avis de recherche n° 74

Lorsqu'en 1889, Peano publie ses axiomes, zéro en est exclu. A partir de quand zéro fut-il admis à vivre dans $\mathbb{N}$?

Michel Guillemot (Toulouse) a envoyé un extrait du formulaire publié par Peano en 1899 où, cette fois, les nombres entiers naturels démarrent à 0.

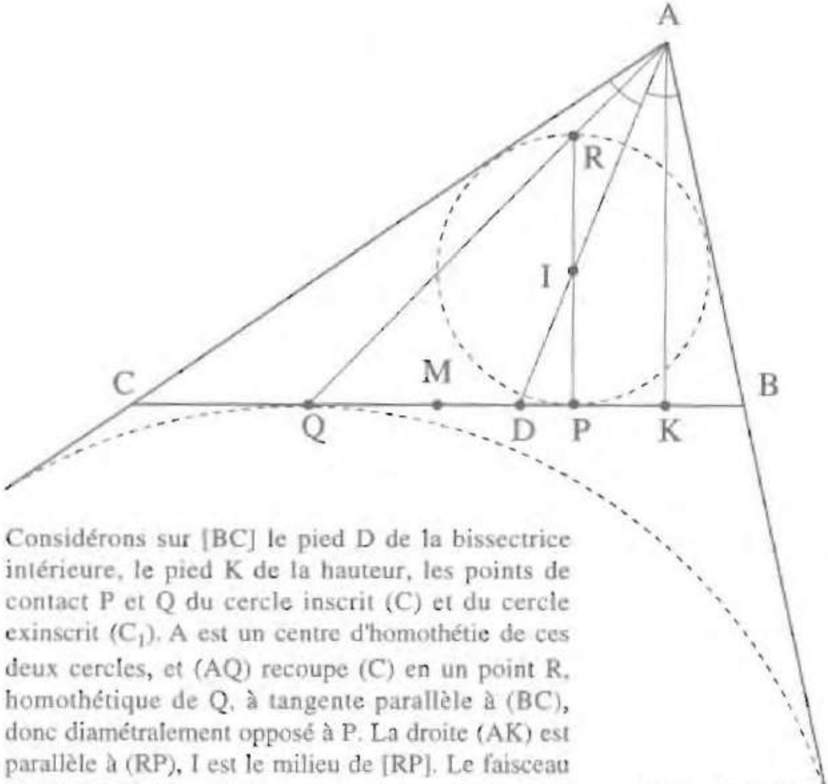
Avis de recherche n° 77

Démonstration de géométrie pure du résultat suivant concernant le triangle : le point de Gergonne (point de concours des céviennes des points de contact du cercle inscrit avec les côtés), le point de Nagel (point des céviennes des points de contact des cercles exinscrits avec les côtés), l'isotomique du centre du cercle inscrit et l'isotomique de l'orthocentre sont alignés et forment dans cet ordre une division harmonique (l'isotomique d'un point de coordonnées barycentriques (α, β, γ) étant le point de coordonnées : $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$

Etude de Jacques Bouteloup (Rouen)

Tout en résolvant la question posée, cette étude met en évidence quelques autres propriétés de géométrie du triangle qu'il m'a paru intéressant d'établir à cette occasion. Nous désignons respectivement par I, H, J et N le centre du cercle inscrit, l'orthocentre, le point de Gergonne et le point de Nagel du triangle ABC.

1 - Première division harmonique remarquable :



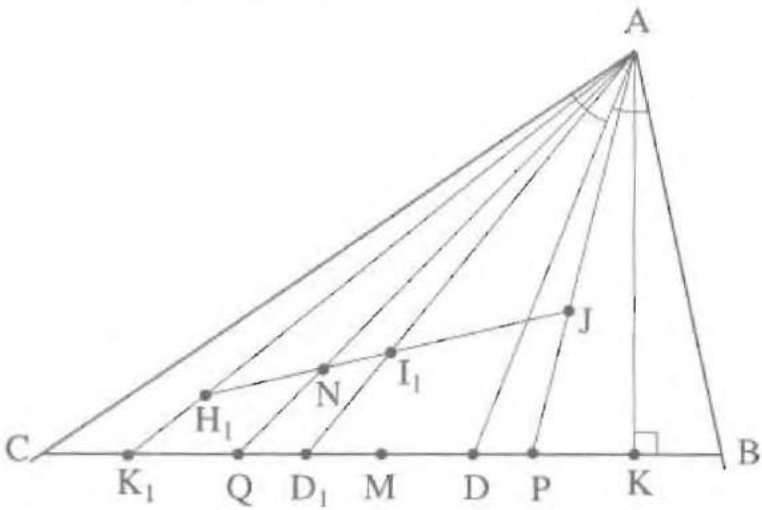
Considérons sur [BC] le pied D de la bissectrice intérieure, le pied K de la hauteur, les points de contact P et Q du cercle inscrit (C) et du cercle exinscrit (C_1). A est un centre d'homothétie de ces deux cercles, et (AQ) recoupe (C) en un point R, homothétique de Q, à tangente parallèle à (BC), donc diamétralement opposé à P. La droite (AK) est parallèle à (RP), I est le milieu de [RP]. Le faisceau (ARQ, AP ; AID, AHK) est donc harmonique, et coupe (BC) en la division harmonique (Q, P; D, K).

N.D.L.R. peut-être est-il utile pour tous les "jeunes" de moins de 50 ans, dont je fais partie et à qui on n'a pas enseigné ces belles mathématiques d'énoncer le théorème ici utilisé que tous les mathélems savaient jusqu'aux années 60 : *Pour qu'un faisceau de quatre droites concourantes soit harmonique, il faut et il suffit que trois de ces droites découpent deux segments "égaux" sur une parallèle à la quatrième.*

2 - Correspondance homographique remarquable

Nous considérons les points analogues D', K', P', Q' sur CA. Soit (h) la correspondance homographique entre (BC) et (CA) caractérisée par : $P \mapsto P'$, $Q \mapsto Q'$, $D \mapsto D'$. Les égalités de birapport entraînent que $K \mapsto K'$. Si $m \mapsto m'$ dans (h), nous avons une correspondance homographique entre Am et Bm'. Le point d'intersection de Am et Bm' décrit donc une conique (Γ) passant par A, B, et les points J, N, I, H obtenus à partir des positions particulières ci-dessus. Le remplacement de (CA) par (AB) conduit à une conique passant par A, C et les quatre points remarquables. Elle est donc confondue avec la précédente, et (Γ) passe par C, qui est ainsi sa propre image dans (h). On en déduit des égalités de birapports.

3 - Établissement de la propriété recherchée.



Nous considérons la correspondance homographique (s') ∘ (h) ∘ (s), (s) et (s') désignant la symétrie sur BC par rapport au milieu M de [BC], et (s') la symétrie analogue sur (CA) . Dans (s), P et Q s'échangent, D et K donnent les isotomiques D_1 et K_1, C donne B. Nous avons des propriétés analogues sur (CA), avec notamment C donne A . Si p' est l'image de p dans cette homographie, nous avons encore une correspondance homographique entre Ap et Bp'. Mais maintenant AB ↦ BA . La droite (AB) étant sa propre image, le point d'intersection de Ap et Bp' décrit une droite contenant les points obtenus à partir des positions particulières : N, J, I_1 et H_1 isotomiques de I et H.

La division harmonique (Q, P ; D, K) donne par symétrie la division harmonique (P, Q ; D_1, K_1) d'où un faisceau harmonique de sommet A, coupant la droite obtenue suivant la division harmonique (J, N, I_1, H_1), ce qui établit la propriété demandée par M. Blanchard.

4 - Application de la correspondance homographique (h).

C étant sa propre image, la droite (mm') passe par un point fixe. On en déduit ainsi la concourance de (PP'), (QQ'), (DD'), (KK'). Il s'agit bien entendu d'une propriété projective. Les 4 droites peuvent être parallèles.

5 - Autre obtention de la conique (Γ).

(Γ), passant par A, B, C, H est une hyperbole équilatère. Elle est caractérisée par son passage par I, et la démonstration ci-dessous peut être généralisée à la définition d'une hyperbole équilatère passant par A, B, C et un point O fixé. Orientons les perpendiculaires de I à BC et CA par $\overrightarrow{IP}$ et $\overrightarrow{IP'}$, et considérons 2 points q et q' variables sur chacune, tels que $\overrightarrow{Iq} = \overrightarrow{Iq'}$. Ils sont en correspondance homographique, donc aussi les droites (Aq) et (Bq'). Le point d'intersection décrit une conique passant par A et B, par I (q et q' en I), J (q et q' en P et P'), N (q et q' en R et au point analogue R'), H (q et q' à l'infini). On démontre ainsi de nouveau que ces points sont sur une même conique.

Pour passer à la question posée, il suffit d'utiliser le fait qu'une conique passant par A, B, C a une équation barycentrique de la forme : $\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0$.

Les coordonnées X, Y, Z des isotomiques vérifient $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$. Ils sont alignés. C'est plus rapide, mais on utilise les coordonnées, et l'on n'obtient pas immédiatement la propriété de division harmonique. On peut déterminer α, β, γ en écrivant que la conique ou la droite passent par 2 des points remarquables. On a ainsi des vérifications.

J'indique sans explicitations de calculs le résultat à un facteur près :

$$\alpha = a(p-a)((b-c)\ ;\ \beta = b(p-b)(c-a)\ ;\ \gamma = c(p-c)(a-b).$$

6 - Propriétés de l'hyperbole (Γ).

Le faisceau harmonique de sommet A situé sur la courbe la coupe en 2 couples de droites conjuguées (IH) et (NJ). La transformée par isogonalité de la droite (OI) est une conique passant par A, B, C, H, I. C'est donc (Γ). On passe ainsi de OI à la droite étudiée par la succession d'une isogonalité et d'une isotomie. Les points N et I s'échangeant par la 2°, on en déduit que OI contient les isogonaux de N et J.

Je signale enfin une propriété remarquable de (Γ) : Le centre est le point de Feuerbach de ABC. J'indique 2 possibilités de démonstration, l'une aboutissant à ses coordonnées barycentriques (sans détailler les calculs), l'autre utilisant des propriétés de géométrie du triangle :

1ʳᵉ démonstration : on détermine les coordonnées barycentriques de ce centre en écrivant qu'il a comme polaire la droite de l'infini, de coefficients 1, 1, 1 . On trouve $\alpha(\beta+\gamma-\alpha)$ et permutations, ce qui donne après utilisations des valeurs calculées de α, β, γ : $(p-a)(b-c)^2$ et permutations, pouvant encore s'écrire : a $\sin^2(B-C)/2$ et permutations, et l'on trouve (si on les connaît !) les coordonnées du point de Feuerbach.

2ᵉᵐᵉ démonstration : on utilise la propriété remarquable : étant donnée une droite issue du centre 0 du cercle circonscrit, le coupant en M, M', les cercles podaires d'un point μ variable de cette droite (passant par les projections orthogonales de μ sur BC, CA, AB) passent par un point fixe ω qui appartient au cercle d'Euler (podaire de 0) et aux droites de Simson de M et MI (cas particuliers). Il est appelé orthopôle de la droite. C'est le centre de l'hyperbole équilatère transformée isogonale de la droite, les asymptotes étant les droites de Simson de M et MI. Dans le cas de la droite OI, un cercle podaire est le cercle inscrit, et μ est l'unique point commun au cercle inscrit et au cercle d'Euler, c'est-à-dire le point de Feuerbach. (Γ) est pour cette raison appelée hyperbole de Feuerbach.

Autres réponses : P. Deleham (Mayotte), E. Delplanche (Créteil)

Avis de recherche N° 81

Considérons l'ensemble des restes de la division euclidienne d'un nombre premier par son rang. Cet ensemble est-il majoré, ou, à l'opposé, égal à ℕ ? Peut-on trouver trois nombres premiers consécutifs ayant même reste ?

Notre collègue avait aussi envoyé sa question à "Pour la Science", qui a déjà publié une réponse dans son numéro de septembre 1997 (p. 7). On y trouve une démonstration de la non majoration de l'ensemble des restes, utilisant le développement asymptotique de la suite des nombres premiers : $p_n = n\ln n + n\ln(\ln n) - n + o(n)$. L'auteur pense qu'on pourrait arriver à démontrer que cet ensemble de restes est de densité 1.

Frank Gautier (Clermont-Ferrand) a cherché les restes apparaissant jusqu'au 30000ᵉᵐᵉ nombre premier et a remarqué que 44 n'apparaissait pas.

Le plus petit triplet de nombres premiers consécutifs égaux modulo leur rang, est (1181, 1187,1193), de restes 17 modulo leur rang (194,195,196), et le plus petit quadruplet de tels nombres premiers est (1741,1747,1743,1749), de rangs 271 à 274 (envoyé par Pierre Barnouin, qui pour la première fois a abandonné le Zbasic, pour passer à Maple, utilisant sa puissante fonction : "nextprime")

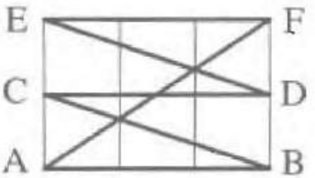
Avis de recherche n° 83 de M. Deleham (Coconi, Mayotte).

Déterminer les hexagones dont le périmètre est supérieur à la somme des longueurs des diagonales.

Réponse de Jean Moreau de St Martin (Paris)

1 - A priori, tout segment reliant deux sommets d'un polygone sans être un des côtés est une diagonale. Un hexagone en a 9.

Voici un exemple d'hexagone plan ABCDEF ayant la propriété de l'énoncé : les sommets ont pour coordonnées A(0,0); B(3,0); C(0,1); D(3,1); E(0,2); F(3,2).



Ces hexagones ne peuvent être convexes, comme on le verra plus loin (§3). La dimension prépondérante sépare l'ensemble {A, C, E} de l'ensemble {B, D, F} en sorte qu'elle influence les 6 côtés et seulement 3 diagonales.

Cela n'étant pas une détermination bien nette des hexagones ayant la propriété, j'ai envisagé d'autres interprétations de l'énoncé.

2 - L'auteur de l'avis a peut-être eu en vue le cas de l'hexagone régulier, où le périmètre P est égal à la somme (S3) réduite aux "grandes" diagonales AD, BE, CF. C'est aussi le cas de l'hexagone inscrit dans un cercle et où ACE (ou BDF) est un triangle équilatéral.

L'hexagone régulier a cela de remarquable qu'une petite déformation ne produit, pour la quantité P – S3, qu'une variation du second ordre. (Corrélativement, dans le système articulé constitué par les côtés et les grandes diagonales, la distribution des forces n'est pas statiquement déterminée).

Cependant il ne s'agit, pour P – S3, ni d'un maximum ni d'un minimum, même parmi les hexagones inscrits :

- avec ABCDE concentrés en un point du cercle, F diamétralement opposé, P—S3 est égal au diamètre;
- avec ABC concentrés en un point du cercle, DEF concentrés au point diamétralement opposé, c'est S3—P qui est égal au diamètre.

A fortiori le signe de P – S3 ne permet pas de caractériser précisément la forme des hexagones convexes. En fait, étant donnés 3 points non alignés, on a à la fois :

a) il existe un hexagone plan convexe dont ces 3 points sont des sommets et vérifiant P<S3;

b) il existe un hexagone plan convexe dont ces 3 points sont des sommets et vérifiant P>S3.

Preuve de a).

Soient A,B,C les points donnés, O un point intérieur à l'angle formé par les demi-droites BA et BC. Soient D, E, F les symétriques de A, B, C par rapport à O.

Dans l'hexagone ABCDEF on a P<S3 si BO est pris assez grand (par exemple BO > 3(AB+BC)).

En effet CD = FA< AB + BC + 2BO,

BE = 2 BO, AD = CF > 2BO – AB – BC,

d'où P < 4(AB + BC) + 4BO, S3 > 6BO – 2(AB + BC).

Preuve de b)

Soient A, C, E les points donnés, A', C', E' les pieds des médianes du triangle ACE.

On a (inégalité du parallélogramme) 2AA' < AC+AE et les inégalités analogues pour CC' et EE', d'où pour l'hexagone AE'CA'EC' la propriété S'3 < P'.

Ce dernier hexagone n'est pas strictement convexe mais il existe un hexagone ABCDEF qui en est "voisin" en gardant la propriété.

Je considère le disque de centre E', de rayon r < (P'– S'3)/3, puis sa partie extérieure au triangle ACE et intérieure à l'angle CEA. Je choisis B dans cette partie.

AB + BC > AC, BE < EE' + r, donc AB + BC – BE > AC – EE' – r.

Je choisis de même D près de A' et F près de C', de façon à constituer un hexagone strictement convexe. En ajoutant les inégalités on a P – S3 > P' – S'3 – 3r > 0.

3 - Je fais maintenant porter la somme sur les 6 "petites" diagonales AC, BD, CE, DF, EA, FB. Pour tout hexagone convexe le périmètre est inférieur à leur somme S6.

Soit un hexagone convexe ABCDEF et B', D', F' les intersections de EB, AD, CF avec AC, CE, EA respectivement.

Examinons la variation de la quantité MA + MC – MD – MF quand le point M se déplace de B en B' sur la droite BE. Comme cos(ME, MF) > cos(ME, MA), le déplacement élémentaire de M donne une variation de MA plus petite que la variation de MF : MA – MF augmente, et de même MC – MD.

Au total la quantité $Q = P - S6$ augmente quand on passe de l'hexagone ABCDEF (Q1) à AB'CDEF (Q2). Elle augmente encore, de la même façon, quand on passe à AB'CD'EF (Q3) et à AB'CD'EF' (Q4). Les inégalités $Q1 < Q2 < Q3 < Q4$ sont strictes si ABCDEF est strictement convexe.

Mais Q4 est l'opposé du périmètre du triangle B'D'F', ce qui entraîne $Q4 < 0$ et donc $Q1 < 0$.

Pour conclure, on voit mal comment la condition de l'énoncé peut "déterminer" des hexagones. Elle détermine dans l'ensemble des hexagones une partie qui, avec la définition de la somme à 6 ou 9 diagonales, ne contient aucun hexagone plan et convexe.