Olympiades

38th
International
Mathematical
Olympiad

ARGENTINA

Les solutions de ces six problèmes paraîtront dans le Bulletin 414 de Février-Mars 1998. D'ici là, les lecteurs sont invités à communiquer leurs propres solutions ou leurs commentaires (sur ces problèmes ou sur les Olympiades en général) à :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu - 75010 Paris

afin qu'il en rende compte lors de la publication des solutions.

Mar del Plata
ARGENTINE
Premier jour
24 juillet 1997

(Chaque problème vaut 7 points - Temps accordé : 4 heures et demie)

1 - Dans le plan, les points à coordonnées entières sont les sommets de carrés unités. Les carrés sont coloriés alternativement en blanc et noir (comme sur un échiquier).

Pour tout couple d'entiers strictement positifs m et n, on considère un triangle rectangle dont les sommets sont des points à coordonnées entières et dont les côtés de l'angle droit, de longueurs m et n, suivent les côtés des carrés.

Soit S_1 l'aire totale de la partie noire du triangle et S_2 l'aire totale de sa partie blanche. On pose : $f(m,n) = |S_1 - S_2|$.

(a) Calculer $f(m,n)$ pour tous les entiers strictement positifs m et n qui sont tous deux pairs ou tous deux impairs.

(b) Montrer que pour tout m et n : $f(m,n) \leq (1/2)\max(m,n)$.

(c) Montrer qu'il n'existe pas de constante C telle que, pour tout m et n, $f(m,n) < C$.

2 - L'angle $\widehat{A}$ est le plus petit dans le triangle ABC.

Les points B et C divisent le cercle circonscrit au triangle en deux arcs.

Soit U un point intérieur à l'arc limité par B et C qui ne contient pas A.

Les médiatrices des segments AB et AC rencontrent la droite AU respectivement en V et W. Les droites BV et CW se coupent au point T.

Montrer que : $AU = TB + TC$.

3 - Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels vérifiant les conditions suivantes :

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$$

et $$|x_i| \leq \frac{n+1}{2} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

Montrer qu'il existe une permutation $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ telle que : $$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

Deuxième jour

25 juillet 1997

(Chaque problème vaut 7 points - Temps accordé : 4 heures et demie)

4 - Une matrice carrée à n lignes et n colonnes, à éléments dans l'ensemble $S = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ est appelée une matrice *d'argent* si, pour tout $i = 1, \dots, n$, la réunion de la i-ème ligne et de la i-ème colonne contient tous les éléments de S. Montrer que :

(a) il n'existe pas de matrice d'argent pour $n = 1997$;

(b) il existe des matrices d'argent pour une infinité de valeurs de n.

5 - Trouver tous les couples (a, b) d'entiers $a \geq 1$, $b \geq 1$ vérifiant l'équation :

$$a^{(b^2)} = b^a.$$

6 - Pour tout entier strictement positif n, $f(n)$ désigne le nombre de façons de représenter n comme une somme de puissances de 2 à exposants entiers positifs ou nuls.

Deux représentation qui ne diffèrent que par l'ordre des termes de la somme sont considérées comme les mêmes. Par exemple $f(4) = 4$, car le nombre 4 peut être représenté par les quatre façons suivantes : 4 ; 2 + 2 ; 2 + 1 + 1 ; 1 + 1 + 1 + 1.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$:

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$