

Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes »...si possible trouver des solutions et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions. Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés.

Énoncés, réponses et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur des feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu
75010 PARIS

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ n° 267 (Roger CUCULIÈRE, Marne la Vallée)

Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur un intervalle $I = [a, b]$ (avec $a < b$), soit g une fonction de classe C^1 sur $I = [a, b]$, telle que $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$ et $\forall x \in]a, b[$ $g'(x) \leq f'(x)$.

Démontrer que $\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \leq \int_a^b \sqrt{1 + g'(t)^2} dt$ et que l'égalité n'est vérifiée que si les deux fonctions sont égales pour tout $x \in [a, b]$.

ÉNONCÉ n° 268 (François LO JACOMO, Paris)

Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit. Le cercle inscrit dans ABC , de centre I , touche les côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ en D , E , F respectivement. Soit K l'orthocentre du triangle DEF .

Montrer que O , I et K sont alignés.

ÉNONCÉ n° 269 (Michel LAFOND, Dijon).

Si x, y, z et n sont quatre entiers naturels vérifiant : $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = n$, montrer que le produit xyz est un cube parfait.

SOLUTION DES ÉNONCÉS PRÉCÉDENTS

ÉNONCÉ n° 246 (Roger CUCULIÈRE, Rabat, Maroc).

Trouver tous les triangles à trois côtés entiers dont l'aire est égale au demi-périmètre (resp. au périmètre).

RÉPONSE

Il y a un seul triangle à côtés entiers dont l'aire est égale au demi-périmètre : le fameux triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5.

Mais il y a cinq triangles à côtés entiers dont l'aire est égale au périmètre : deux triangles rectangles (6, 8, 10) et (5, 12, 13) et trois autres : (9, 10, 17), (7, 15, 20) et (6, 25, 29).

DÉMONSTRATION

J'ai reçu des solutions d'Alain BAILLE (38 - Grenoble), Armand BUQUET (Hambourg, Allemagne), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Alain CORRÉ (Garoua, Cameroun), Edgard DELPLANCHE (91 - Créteil), Jacques FORT (86 - Poitiers), Michel JUNTAS (93 - St Ouen), René MANZONI (76 - Le Havre), Charles NOTARI (31 - Montaut), Serge PAICHARD (53 - Laval), Maurice PERROT (75 - Paris), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), Raymond RAYNAUD (04 - Digne), Geneviève SAMBARD (02 - St Quentin), Pierre SAMUEL (92 - Bourg la Reine) et André VIRICEL (54 - Villers lès Nancy), plus quatre solutions incomplètes ou fausses.

Serge PAICHARD m'envoie une solution parue dans *Le jardin du Sphinx*, de Pierre BERLOQUIN (Dunod 1981) et Miguel AMENGAL-COVAS signale que la seconde partie de l'exercice est résolue p. 221 à 223 dans *The USSR Olympiad Problem Book*, de D.O. SHKLAZSKY, N.N. CHENTZOV et I.M. YAGLON (Dover Publications, New York) sous le numéro 127.

On part généralement de la formule de Héron, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ en remarquant tout de suite que si le périmètre du triangle $a + b + c = 2p$ était un entier impair, $(4S)^2 = 2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)$ serait également impair, et l'aire S ne pourrait être égale ni au périmètre ni au demi-périmètre.

Cela nous ramène à trouver trois entiers $x = p - a$, $y = p - b$ et $z = p - c$ dont le produit vaille : dans le premier cas où $S = p = xyz = (x + y + z)$ et dans le second cas où $S = 2p$, $xyz = 4(x + y + z)$.

Pierre SAMUEL remarque que pour x donné, y est fonction homographique décroissante de z , et ne peut prendre qu'un nombre restreint de valeurs entières, surtout si l'on suppose $x \leq y \leq z$.

Plusieurs lecteurs (Jacques FORT, Michel JUNTAS...) expriment différemment que, dans le premier cas : $x + y + z = xyz$, si $x \leq y \leq z$, $xyz \leq 3z \Rightarrow xy \leq 3$ (et l'inégalité est même stricte car on ne peut pas avoir $x = y = z$), dans le second cas, $xy < 12$ avec en outre $xy \geq 5$ car $(xy - 4)z = x + y > 0$: il reste un petit nombre de cas à étudier.

Mais la solution de Geneviève SAMBARD et Armand BUQUET consiste à dire que (sans supposer $x \leq y \leq z$) :

$$xyz = x + y + z \Leftrightarrow (xy - 1)(xz - 1) = x^2 + 1$$

$$xyz = 4(x + y + z) \Leftrightarrow (xy - 4)(xz - 4) = 4(x^2 + 4).$$

Comme ni $x^2 + 1$, ni $x^2 + 4$ ne peuvent être des carrés parfaits (le plus petit carré supérieur à x^2 est $x^2 + 2x + 1$), le triangle ne peut pas être isocèle et l'on peut désormais supposer $x < y < z$.

Dans le premier cas,

$$\begin{aligned} (xy - 1)(xz - 1) - (x^2 + 1) &\geq (x(x + 1) - 1)(x(x + 2) - 1) - (x^2 + 1) \\ &= (x - 1)x(x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

ce qui est strictement positif dès lors que $x > 1$.

La seule solution possible est donc pour $x = 1$,

$$(y - 1)(z - 1) = 2 \quad \text{d'où } y = 2, z = 3$$

et $p = (x + y + z) = 6$, $a = p - x = 5$, $b = p - y = 4$, $c = p - z = 3$.

Dans le second cas,

$$\begin{aligned} (xy - 4)(xz - 4) - 4(x^2 + 4) &\geq (x(x + 1) - 4)(x(x + 2) - 4) - 4(x^2 + 4) \\ &= x(x + 1)(x^2 - 2x - 12), \end{aligned}$$

ce qui impose $x + 1 \leq \sqrt[3]{3}$.

$$\text{Pour } x = 1, (y - 4)(z - 4) = 20 \quad \Rightarrow \quad y - 4 = 1 \text{ et } z - 4 = 20$$

$$\text{ou } y - 4 = 2 \text{ et } z - 4 = 10$$

$$\text{ou } y - 4 = 4 \text{ et } z - 4 = 5.$$

$$\text{Pour } x = 2, (y - 2)(z - 2) = 8 \quad \Rightarrow \quad y - 2 = 1 \text{ et } z - 2 = 8$$

$$\text{ou } y - 2 = 2 \text{ et } z - 2 = 4.$$

D'où les cinq solutions annoncées.

Plusieurs lecteurs remarquent que l'aire du triangle $S = pr$, r étant le rayon du cercle inscrit dans le triangle ; le problème revient donc à chercher les triangles à côtés entiers dont le cercle inscrit ait pour rayon $r = 1$ ou $r = 2$. Comme $x = p - a$ est la distance de A aux points de contact du cercle inscrit, $x = r \cotg A/2$, et comme le plus grand des trois angles est au moins égal à

$\pi/3$, $x \leq r\sqrt{3}$, ce qui limite le choix de x .

On pourrait chercher plus généralement les triangles à côtés entiers dont le cercle inscrit (resp. circonscrit) ait un rayon entier. Le plus petit sera une fois de plus notre célèbre triangle (3, 4, 5).

ÉNONCÉ n°247 (Serge PAICHARD, Laval).

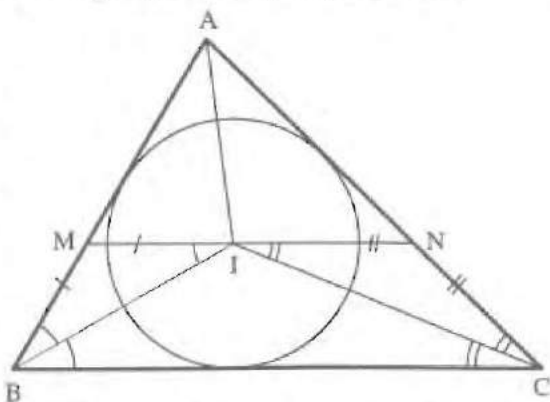
Placer deux points M et N sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC de telle sorte que $MN = MB + NC$.

SOLUTION

27 lecteurs : Miguel AMENGUAL-COVAS (Majorque-Espagne), Alain BAILLE (38 - Grenoble), Hubert BARBERIS (06 - Menton), René BENOIST (91 - Palaiseau), Michel BIGOT (33 - La Teste), R. BOURDON (14 - Tourgeville), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Alain CORRÉ (Garoua, Cameroun), Jacques DAUTREVAUX (06 - St André), Philippe DELEHAM (97 - Ouanjani), Edgard DELPLANCHE (91 - Créteil), Christian DUFIS (87 - Limoges), Jean-Yves HELY (35 - Rennes), Michel JUNTAS (93 - St Ouen), Jacques LEGRAND (64 - Biarritz), René MANZONI (76 - Le Havre), André MARCOUT (10 - Ste Savine), A. MOLARD (67 - Strasbourg), Charles NOTARI (31 - Montaut), Jean OSWALD (35 - Rennes), Maurice PERROT (75 - Paris), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), Raymond RAYNAUD (04 - Digne), Jean-Paul ROUX (42 - Unieux), Geneviève SAMBARD (02 - St Quentin), Pauline TROCHU (85 - Fontenay-le-Comte), et André VIRICEL (54 - Villers lès Nancy) ont étudié cet énoncé assez vague sous divers angles qui ne manquent pas d'intérêt.

Tout d'abord, fallait-il proposer une seule solution ou chercher toutes les solutions ? Quelques lecteurs se sont contentés d'une solution particulière : la parallèle à (BC) passant par le centre I du cercle inscrit coupe $[AB]$ et $[AC]$ en des points M et N solutions.

Geneviève SAMBARD utilise le théorème de Thalès et Philippe DELEHAM le théorème de Van Aubel. Miguel AMENGUAL-COVAS calcule les surfaces de AMI et ANI et



du trapèze $BMNC$ pour en déduire, si l'on appelle p le demi-périmètre du triangle ABC et r le rayon du cercle inscrit, en posant $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$:

$$(c - BM) \frac{r}{2} + (b - CN) \frac{r}{2} + \left(\frac{MN + a}{2} \right) r = \text{ap} \quad \text{ap étant l'aire du triangle } ABC.$$

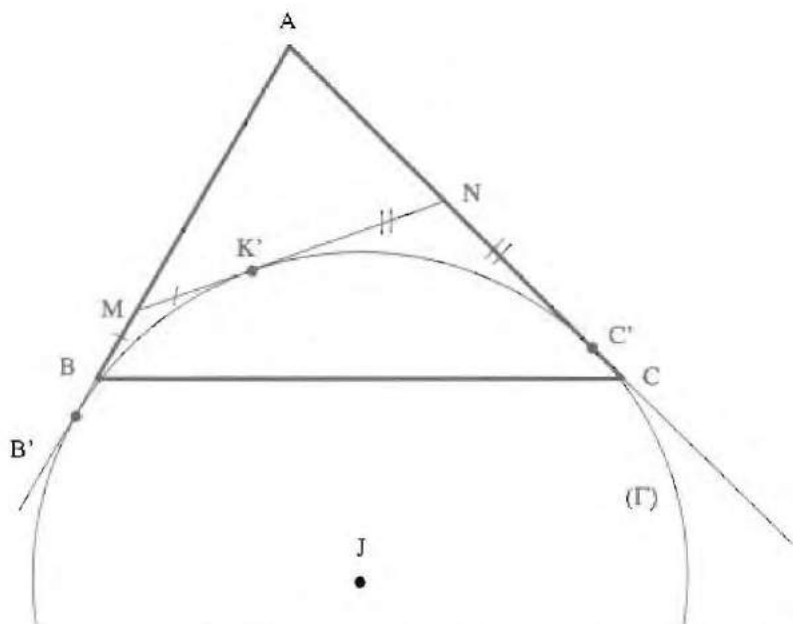
Il cite d'ailleurs une référence bibliographique : Julius Petersen, *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*, Paris (Gauthier Villars), 1946, p. 20 (problème n° 97).

Serge Paichard lui-même a finalement retrouvé son problème sous les numéros 216 et 217, p. 82 d'un ouvrage *Eléments de Géométrie*, dont il a égaré la référence précise. Pour en revenir au centre du cercle inscrit, Jean Yves HÉLY remarque que, si une parallèle à (BC) coupe $[AB]$ et $[AC]$ en des points solutions, et si l'on place sur cette parallèle un point K tel que $MK = MB$ et $NK = NC$, dans les triangles isocèles MKB et NKC , les angles sont égaux : $\widehat{MKB} = \widehat{MBK}$ et $\widehat{NKC} = \widehat{NCK}$, mais, du fait du parallélisme, $\widehat{MKB} = \widehat{KBC}$ et $\widehat{NKC} = \widehat{KCB}$, donc $[BK]$ et $[CK]$ sont les bissectrices de \widehat{B} et \widehat{C} respectivement.

Si l'on souhaite élargir le problème, faut-il prouver l'unicité du point N pour un point M donné ? Plusieurs lecteurs se sont attardés là-dessus, Alain BAILLE, à l'aide d'une hyperbole et Jacques DAUTREVAUX d'une ellipse. Pour René MANZONI, Raymond RAYNAUD et Charles NOTARI, cette unicité se prouve algébriquement : si $AM = x$ et $AN = y$, on a : $x^2 + y^2 - 2xy \cos A = ((c - x) + (b - y))^2$ donc x et y se déduisent l'un de l'autre par une transformation homographique involutive. On en déduit même que (MN) est tangente à une conique fixe et tangente à (AB) et (AC) .

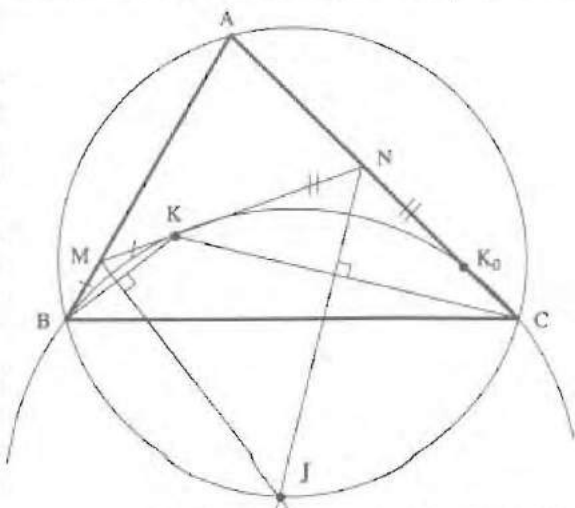
Plusieurs lecteurs remarquent que le problème revient à trouver M et N sur $[AB]$ et $[AC]$ tels que le périmètre du triangle AMN soit fixe, égal à $AB + AC$. Or, Jacques DAUTREVAUX et Pauline TROCHU en déduisent que le cercle exinscrit au triangle AMN est fixe, puisque ses points de contact avec (AM) et (AN) sont, résultat classique, à une distance $\frac{AM + MN + NA}{2}$ du point A . (voir la figure page suivante).

C'est d'ailleurs l'idée qui peut sembler la plus naturelle : appelons B' et C' les points des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ tels que $AB' = AC' = \frac{b + c}{2}$, avec les notations classiques : $b = AC$ et $c = AB$, et construisons le cercle (Γ) , de centre J , tangent à (AB) et (AC) en B' et C' respectivement. Supposons, ce



qui ne restreint pas le problème, que $b \geq c$. Par tout point M de $[AB]$, on peut mener une tangente à (Γ) , qui recoupe $[AC]$ en N tel que : si l'on appelle K' le point de contact de cette tangente avec (Γ) , $MK' = MB$ et $NK' = NC'$, donc $MN = MB' + NC' = MB + NC$. On trouve ainsi, pour tout point M de $[AB]$, une solution du problème.

Pourtant, cette solution n'a rallié que 26% des suffrages, 33% des lecteurs lui ayant préféré la construction suivante : soit K le point de (MN) tel que $MK = MB$ et $NK = NC$. Les médiatrices de $[BK]$ et $[CK]$, qui passent par M et N respectivement, se coupent en J . Comme $JB = JK = JC$, J est sur



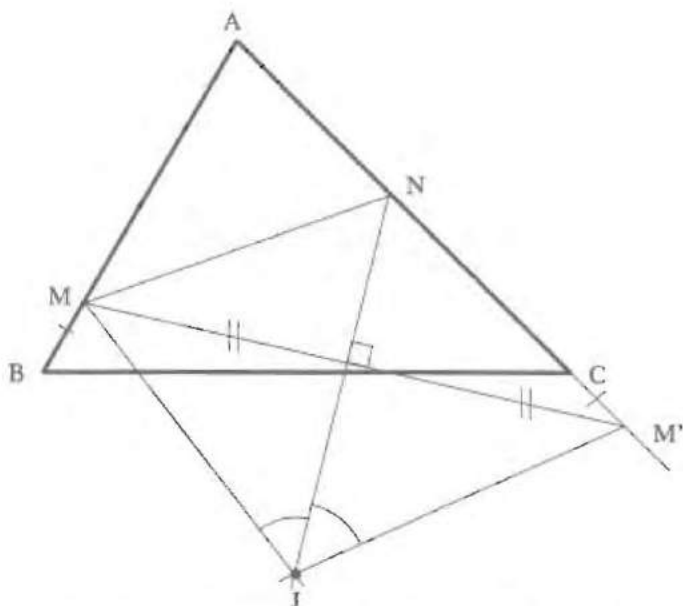
la médiatrice de $[BC]$.

Et comme $\widehat{MBJ} = \widehat{MKJ}$, $\widehat{NCJ} = \widehat{NKJ}$ (par symétrie) \widehat{MBJ} et \widehat{NCJ} sont supplémentaires, ce qui signifie que B, J, C et A (intersection de (MB) et (NC)) sont cocycliques. J est donc, sur le cercle circonscrit à ABC , le milieu de l'arc BC ne contenant pas A , et l'arc de cercle de centre J et de rayon $JB = JC$ contient le point K . Réciproquement, pour un point quelconque K de cet arc de cercle, les médiatrices de $[BK]$ et $[CK]$ coupent $[AB]$ et $[AC]$ en deux points M et N vérifiant $MN = MB + NC$.

Sous réserve que cet arc de cercle recoupe $[AC]$ en K_0 (dans l'hypothèse $AC > AB$). Dans le triangle isocèle JK_0C , $\widehat{K_0JC} = \widehat{B} - \widehat{C}$, d'où l'on déduit $\widehat{K_0JB} = 2\widehat{C}$, la bissectrice de $\widehat{K_0JB}$ (médiatrice de $[K_0B]$) passe donc par A . Lorsque K est en K_0 , N existe (milieu de $[K_0C]$), mais M est en A . Si K dépasse K_0 en direction de C , N existe toujours et se rapproche de C , mais M dépasse A et se rapproche de P , intersection de (AB) avec la médiatrice (Δ) de $[BC]$. On a toujours $MN = MB + NC$, mais pour respecter l'hypothèse $M \in [AB]$, il faut exclure ce cas et imposer que K appartienne à l'arc BK_0 . D'ailleurs, pour des raisons de convexité, il est clair que si M est sur $[AB]$ et N sur $[AC]$, K est obligatoirement intérieur au triangle ABC .

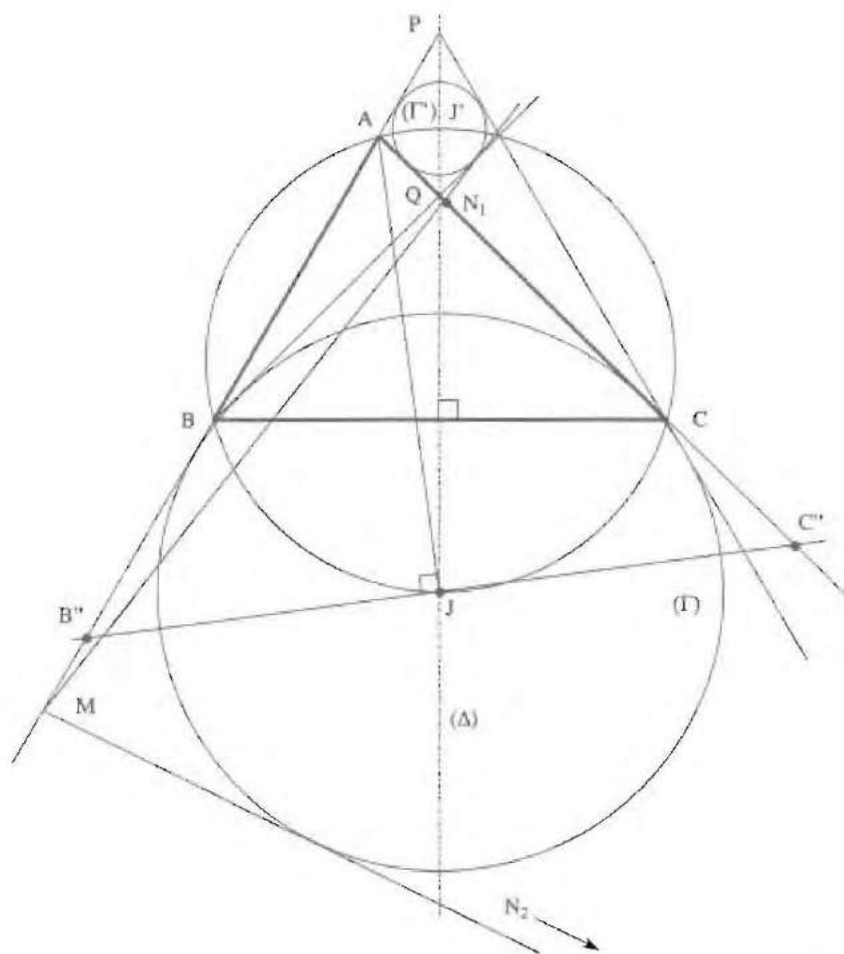
Par ailleurs, le point J , centre de cet arc de cercle, est bien le même que le centre J du cercle (Γ) introduit dans la première méthode. Ce dernier est bien sur la bissectrice de \widehat{A} , car (Γ) est tangent à $[AB]$ et $[AC]$, ainsi que sur la médiatrice de $[BC]$, car $JB^2 = JB'^2 + B'B^2 = JC^2 + C'C^2 = JC^2$. Le point C' est donc le milieu de $[K_0C]$. Le centre I du cercle inscrit dans ABC appartient au cercle de centre J passant par B et C , il est même classique que J est le milieu de $[II_A]$ si l'on appelle I_A le centre du cercle exinscrit à ABC dans l'angle \widehat{A} ... alors que la parallèle à (BC) passant par P est tangente à (Γ) , tout comme, par symétrie, la parallèle à (BC) passant par I_A .

On remarque en outre que l'angle \widehat{MJN} est constant, égal à $\frac{\pi - \widehat{A}}{2}$, et cette remarque a été faite également dans le cadre d'une troisième méthode, choisie par 26% des lecteurs. Plaçons sur la demi-droite $[AC]$, mais au-delà de C , un point M' tel que $CM' = BM$. M' est l'image de M par la rotation de centre J , d'angle $\pi - \widehat{A}$ qui transforme B en C . La médiatrice de $[MM']$



recoupe (AC) en N tel que $MN = NM' = NC + MB$, puisque $MB = CM'$. Sous réserve de prouver que N est bien entre A et C : comme on est toujours dans l'hypothèse $AB \leq AC$, a fortiori $AM \leq AM'$, alors que, M étant du même côté que A de la médiatrice (Δ) de $[BC]$, $MB = CM' \leq MC$. On en déduit que C et A sont de part et d'autre de la médiatrice de $[MM']$, donc que $N \in [AC]$.

« Si les points M et N avaient comme parcours possibles les droites (AB) et (AC) , le problème n'aurait pas non plus manqué d'intérêt », signale André VIRICEL : rien n'interdisait d'envisager cette généralisation. On peut généraliser en fait de deux manières, soit en considérant que MB et NC sont en réalité des valeurs algébriques qui se soustraient lorsque, par exemple, M est au-delà de B et N sur (AC) . La relation homographique liant M et N se prolonge alors et (MN) reste tangente à la même conique (Γ) . Par contre, si l'on compare la longueur MN à la somme des longueurs MB et NC , on devra envisager selon les cas l'une ou l'autre de deux relations homographiques, l'une ou l'autre des deux intersections du cercle circonscrit à ABC avec la médiatrice de $[BC]$, l'un ou l'autre des deux points M' (de part et d'autre de C) tels que la médiatrice de $[MM']$ recoupe (AC) en N , de sorte qu'on aboutira au résultat suivant :



Soit ABC un triangle vérifiant $AB \leq AC$. La médiatrice (Δ) de $[BC]$ recoupe (AC) en Q et (AB) en P . Soient (Γ') et (Γ) , de centres J et J' , les cercles inscrit et exinscrit dans l'angle \widehat{P} au triangle PAC . Si $AB = AC$, (Γ') est réduit à un point $A = P$, et si l'angle \widehat{B} est obtus, les résultats doivent être rerédigés, mais ne sont pas fondamentalement différents. J et J' sont les milieux des arcs BC sur le cercle circonscrit à ABC , puisque (Δ) , bissectrice de l'angle \widehat{P} , par symétrie, les tangentes communes aux deux cercles, est

donc une médiatrice de $[BC]$; en outre, (Γ) et (Γ') sont (AC) et (BQ) . La perpendiculaire en J à (AJ) recoupe (AB) et (AC) en des points que nous appellerons B'' et C'' respectivement. Soit M un point quelconque de (AB) .

- 1 - Si M et B sont de part et d'autre de (Δ) , il n'existe pas de point N sur (AC) tel que $MN = MB + NC$. En effet, $MB > MC$ donc $MB + NC > MC + NC > MN$. Pour la même raison, N , quand il existe, appartient obligatoirement à la demi-droite $[QC)$.
- 2 - Si $M \in [PB]$, il existe un et un seul point N sur (AC) tel que $MN = MB + NC$, c'est l'intersection avec (AC) de la tangente à (Γ) issue de M , et ce point $N \in [CQ]$.
- 3 - Si $M \in [BB'']$, il existe un et un seul point N sur (AC) tel que $MN = MB + NC$, c'est l'intersection avec (AC) de la tangente à (Γ') issue de M , et ce point $N \in [CQ]$.
- 4 - Si M est au-delà de B'' , il existe deux points N sur (AC) tels que $MN = MB + NC$, l'un appartient à $[CQ]$, c'est l'intersection avec (AC) de la tangente à (Γ) issue de M , l'autre est de l'autre côté de C , c'est l'intersection avec (AC) de la tangente à (Γ) issue de M . Cas particulier : si M et N appartiennent à la parallèle à (BC) passant par I_A , transformée de (BQ)

par la rotation de centre J et d'angle $\pi - \widehat{C}$. La tangente en B'' à (Γ) , symétrique par rapport à J de la tangente en C'' à (Γ) , est bien parallèle à (AC) , et de même la tangente en C'' à (Γ) est parallèle à (AB) : le point N ne peut donc pas appartenir à $[C''C]$.

ÉNONCÉ n° 248 (Jacques BOUTELOUP, 76-Rouen).

Soit n un entier naturel ≥ 1 . On désigne par r la partie entière de \sqrt{n} .
Démontrer que n est premier si et seulement si :

$\forall p \leq r \quad C_{n-1}^p + (-1)^{p+1}$ est multiple de n . Trouver un exemple montrant que : $C_{n-1}^r + (-1)^{r+1}$ peut être multiple de n sans que n soit premier.

SOLUTION d'A. BAUVAL (31 - Toulouse).

Soit $a_p = C_{n-1}^p + (-1)^{p+1}$

$a_0 = 0$ et $a_{p-1} + a_p = C_n^r$, donc a_0, \dots, a_r sont tous divisibles par n si et seulement si C_n^1, \dots, C_n^r le sont.

Si n est premier, cette propriété est trivialement vérifiée.

Si n n'est pas premier, soit p un diviseur premier de n inférieur ou égal à r . Alors p ne divise pas $(n-1)(n-2)\dots(n-(p-1))$, donc p ne divise pas C_{n-1}^{p-1} , donc n ne divise pas $\frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$. Les C_n^p, \dots, C_n^r ne sont donc pas tous divisibles par n (donc a_0, \dots, a_r non plus).

Il peut arriver que n soit non premier mais que a_r soit divisible par n : par exemple $n = 22$ ($r = 4, a_r = 272 \times n$).

AUTRES SOLUTIONS

Jacques AMON (87 - Limoges), Alain BAILLE (38 - Grenoble), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Alain CORRÉ (Garoua, Cameroun), Edgard DELPLANCHE (91 - Créteil), Robert FERRÉOL (75 - Paris), M. JUNTAS (93 - St Ouen), René MANZONI (76 - Le Havre), Charles NOTARI (31 - Montaut), Maurice PERROT (75 - Paris), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), R. RAYNAUD (04 - Digne), Geneviève SAMBARD (02 - St Quentin).

REMARQUES

L'hypothèse $n \geq 1$ est une erreur de ma part, désolé ! L'auteur avait bien écrit $n > 1$.

Tous les lecteurs ont trouvé le contre-exemple ci-dessus, pour $n = 22$, mais Edgard DELPLANCHE propose en outre $n = 76$, M. JUNTAS y ajoute : $n = 74$ et $n = 94$, et Jacques BOUTELOUP, quant à lui, avait cité $n = 129$.

Robert FERRÉOL signale que si p est inférieur au plus petit facteur premier de n , $C_{n-1}^p + (-1)^{p+1}$ est divisible par n ; c'est lorsqu'on atteint le plus petit facteur premier de n que cette relation est mise en défaut, et par la suite, elle peut redevenir vraie ou rester fausse.

Il existe beaucoup de propriétés apparentées, et il convient de rappeler l'article de Jacques BOUTELOUP, dans le numéro 406 du *Bulletin* (Septembre-Octobre 1996, p.559) sur "*Factorielles et coefficients binomiaux, factorisations et congruences*".

Mais le présent exercice lui « a été suggéré par l'assertion parue dans le *Nouvel Archimède* (p.17) : n est premier si et seulement si $C_{n-1}^r + (-1)^{r+1}$ est multiple de n . La disparition de la revue a entraîné la non correction de l'exercice. »

Signalons à ce sujet qu'il semble peu plausible qu'un critère de primalité, *Bulletin APMEP* n° 412 - Septembre-October 1997

Bulletin de l'APMEP n°412 - Sept/Oct 1997

quel qu'il soit, s'exprime sous une forme simple du type : $f(n)$ multiple de $n \Leftrightarrow n$ premier. Par contre, il existe un certain nombre de critères de primalité consistant à tester une propriété sur tous les entiers $k \leq \sqrt{n}$. Il serait intéressant de savoir s'il existe des critères de primalité qui nécessiteraient un nombre bien inférieur de tests, par exemple qui nécessiteraient des tests sur tous les entiers $k \leq \sqrt[3]{n}$, hormis dans les cas où n se limite à des valeurs très particulières (nombres de Fermat $2^{2^k} + 1$). Cela pourrait faire l'objet d'un avis de recherche.