Examens et concours

Le Baccalauréat ici et ailleurs

En prolongeant l'article de Pierre LEGRAND "Les mathématiques dans les baccalauréats généraux de quelques pays" - Bulletin APMEP n° 400, C. JEANBRAU nous a déja offert, dans le Bulletin n° 411, ses réflexions et commentaires sur les sujets des Baccalauréats anglais et américains. Nous terminons ici son tour d'horizon par les concours tenant lieu de Baccalauréat au Japon.

Les concours japonais

C. Jeanbrau

(Suite et fin de l'article du Bulletin n°411)

QCM national...

Partie A, premier exercice

Soit le polynôme $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x + d)(x^2 + ex + f)$.
Sachant que son reste par $x + 3$ est 2 et qu'il est divisible par $x^2 + 2 + \sqrt{3}$, trouver la valeur de a, b, c, d, e, f.

P(x) divisible par $\left(x + 2 + \sqrt{3}\right)$

{La convention (qui n'est citée qu'en fin d'énoncé de la partie B) est que les lettres désignent l'un des chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)}.

On ne peut donc avoir $d = 2 + \sqrt{3}$.

Par suite, $x + 2 + \sqrt{3}$ divise le trinome à coefficients entiers $(x^2 + ex + f)$ dont la seconde racine est alors nécessairement $\sqrt{3} - 2$ à cause de la forme même des racines. $(x^2 + ex + f) \equiv \left(x + 2 + \sqrt{3}\right)\left(x + 2 - \sqrt{3}\right) \equiv x^2 + 4x + 1$.

On a donc e = 4 et f = 1.

Division euclidienne de P(x) par (x + 3) : P(x) = (x + 3)Q(x) + 2 ; 2 = P(–3)
Soit –27 + 9a – 3b + c = 2 ⇔ 9a – 3b + c = 29 (*)

Par ailleurs : $P(x) = (x + d)(x^2 + 4x + 1) = x^3 + (d + 4)x^2 + (4d + 1)x + d$.
En identifiant avec la forme $(x^3 + ax^2 + bx + c)$: a = d + 4, b = 4d + 1, c = d.
Par report dans (*), il vient d = 2 ; d'où immédiatement : a = 6, b = 9, c = 2.
Des notions de base sur les polynomes et la division euclidienne sont nécessaires, qui, sauf erreur, ne font pas partie du bagage standard de nos élèves de terminale (?).

Partie B (Première moitié)

On donne dans un plan rapporté à un repère orthonormé, les points $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(1, 2\sqrt{3})$, $C(1 - a, (2 - a)\sqrt{3})$.

1°) $\overrightarrow{BC} = \mathbf{bc}\,(1, \sqrt{\mathbf{d}})$; $\widehat{ABC} = \mathbf{ef}$ degrés.

2°) Soit P le point générique de la perpendiculaire issue de C à) la droite (AB) ; on a : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + u\,(\sqrt{\mathbf{g}}, \mathbf{h})$ où u est un paramètre.

3°) Soit Q le point générique de la droite (AB) ; on a

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + t\,(\mathbf{ij}, \sqrt{\mathbf{k}})$, où t est un paramètre.

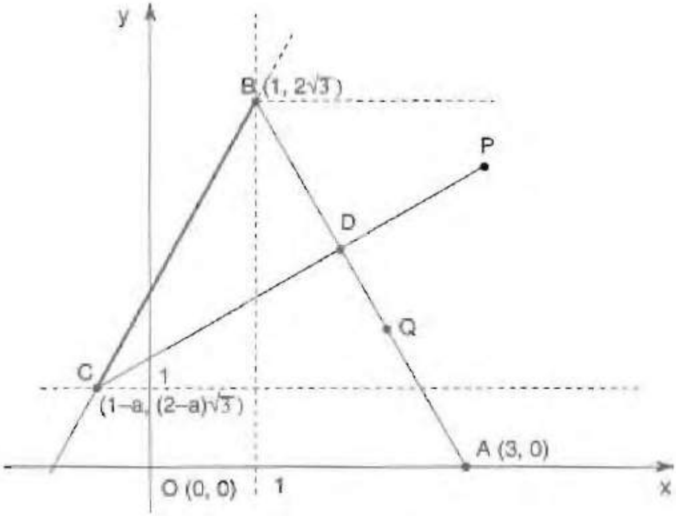
4°) Soit D la projection orthogonale de C sur la droite (AB) ; les coordonnées de D sont $(1 + \mathbf{m}/\mathbf{n}, (\mathbf{p} - \mathbf{q}/\mathbf{r})\sqrt{\mathbf{s}})$.

*Sachant que chaque lettre minuscule grasse représente l'un des chiffres de 1 à 9 ou le signe moins, trouver **b, c,…s**.*

1) On a : $\overrightarrow{BC} = bc(1, \sqrt{d}) = -a(1, \sqrt{3})$. On en déduit b = – et c = a, donc a positif, d = 3. Par ailleurs, *(AB)* et *(BC)* ont des directions symétriques par rapport à *(x'Ox)* et ainsi $\widehat{ABC} = 60°$ donc e = 6 et f = 0.

2) La droite (CP), perpendiculaire à la droite (AB), fera un angle de mesure 30° (modulo 180°) avec x'Ox. On pourra donc la paramétrer à partir du point C et d'un vecteur directeur de composantes $(\sqrt{3}, 1)$ et retenir, en identifiant à la forme proposée : g = 3 et h = 1.

3) De même, la droite (AB) est paramétrable à partir du point A et d'un vecteur directeur de composantes $(-1, \sqrt{3})$. En identifiant avec la forme proposée, on aura i ≡ –, j = 1 et k = 3.



4) Le point D appartient à la droite C, perpendiculaire à (AB). C'est donc "un point P" : $x = 1 - a + u\sqrt{3}$; $y = (2 - a)\sqrt{3} + u$. Mais le point D est aussi un point de la droite (AB). C'est donc "un point Q" : $x = 3 - t$; $y = t\sqrt{3}$.

Finalement, on obtient le système en (u, t)

$$\begin{cases} u\sqrt{3} + t = 2 + a \\ u - t\sqrt{3} = (a - 2)\sqrt{3} \end{cases}$$

Il se résout en $u = a\sqrt{3} / 2$ et $t = 2 - a/2$.

Par report dans l'un des paramétrages (en u ou en t), il vient :

$$x = 1 + a/2 \ ; \ y = (2 - a/2)\sqrt{3}$$

Par identification avec la forme donnée, il vient m = a, n = 2, p = 2, q = a, r = 2, s = 3.

Si l'énoncé fourni est exhaustif, on notera qu'il laisse à la charge du candidat l'hypothèse implicite {a > 0 , a entier de 0 à 9}.

L'exercice suppose, à part cette remarque, une bonne aisance relative aux repérages de directions dans le plan et au paramétrage de droites.

CONCOURS 1991 TODAI...

n° 3 : Soit l'équation $x^3 - 3x - p = 0$, où p est un réel. On désigne par f(p) le produit de la plus grande racine de l'équation par la plus petite lorsqu'il y a 3 racines réelles, distinctes ou non, et le carré de la racine réelle lorsque celle-ci est unique. Trouver le minimum de f(p).

Représenter graphiquement f.

Première solution :

$$y = x^3 - 3x - p$$

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

La fonction $y = y(x)$ définit par morceaux :

- une bijection croissante de $]-\infty, -1]$ sur $]-\infty, 2 - p]$
- une bijection décroissante de $[-1, 1]$ sur $[-2 - p, 2 - p]$
- une bijection croissante de $[1, +\infty[$ sur $-2 - p, +\infty[$

On peut imaginer une discussion selon le signe de

$$T(p) = (-2 - p)(2 - p) = p^2 - 4.$$

Cas n° 1 : $T(p) > 0$: il y a une seule racine réelle.

C'est le cas $\{p < -2$ ou $p > 2\}$. Après recherche des racines par la méthode de Cardan, on obtient, en notant $j = e^{2i\pi/3}$ et $j^2 = e^{4i\pi/3}$ les deux racines cubiques non triviales de l'unité,

$$x_1 = (a(p))^{1/3} + (b(p))^{1/3}$$

$$x_2 = (a(p))^{1/3})j + (b(p))^{1/3}j^2$$

$$x_3 = (a(p))^{1/3})j^2 + (b(p))^{1/3}j$$

où $$a(p) = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2} \text{ et } b(p) = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}$$

La racine réelle est x_1 et on a donc : $f(p) = [(a(p))^{1/3} + (b(p))^{1/3}]^2$.

On peut donc étudier succinctement le graphe de $y = y(p) = f(p)$ et donner l'allure générale de la courbe.

Cas n° 2 : $T(p) \leqslant 0$. Il y a alors trois racines réelles (dont deux confondues pour $p^2 = 4$. C'est le cas : $-2 \leqslant p \leqslant 2$.

On cherche les racines sous forme trigonométrique/polaire : $x = \rho \cos\theta$.

Après calcul, on obtient les trois racines :

$$x_0 = 2\cos[(1/3)\,\mathrm{Arcos}(p/2)]$$

$$x_1 = 2\cos[(1/3)\,\mathrm{Arcos}(p/2) + 2\pi/3]$$

$$x_2 = 2\cos[(1/3)\,\mathrm{Arcos}(p/2) + 4\pi/3].$$

Par : $0 \leqslant (1/3)\,\mathrm{Arcos}(p/2) \leqslant \pi/3$

$$2\pi/3 \leqslant (1/3)\,\mathrm{Arcos}(p/2) + 2\pi/3 \leqslant \pi$$
$$4\pi/3 \leqslant (1/3)\,\mathrm{Arcos}(p/2) + 4\pi/3 \leqslant 5\pi/3.$$

On peut valider le classement : $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_0$.

Pour $p = 2$: $x_1 = x_2$.

Pour $p = -2$: $x_0 = x_2$.

Dans tous les cas : $\{-2 \leqslant p \leqslant 2\}$:

$f(p) = x_0 x_1 = 4\,\{\cos[(1/3)\,\mathrm{Arcos}\,(p/2)]\}\,\{\cos[(1/3)\,\mathrm{Arcos}\,(p/2) + 2\pi/3]\}$

$f(p) = 2\,[\cos[(2/3)\,\mathrm{Arcos}\,(p/2) + 2\pi/3] + \cos(2\pi/3)]$

$f(p) = 2\cos[(2/3)\,\mathrm{Arcos}\,(p/2) + 2\pi/3] - 1$. On peut donner l'allure générale de la courbe.

On a évidemment : $-3 \leqslant f(p) \leqslant 1$.

Le minimum est obtenu pour $(2/3)\,\mathrm{Arcos}\,(p/2) + 2\pi/3 = \pi$.

Soit pour : $\mathrm{Arcos}\,(p/2) = \pi/2$, soit pour $p = 0$.

Bilan global : minimum de $f(p)$ égal à -3 pour $p = 0$.

La question consistant à savoir si je ne viens pas d'appliquer le principe "pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué" est posée.

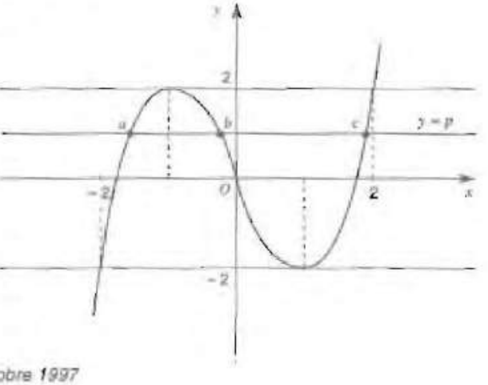
Deuxième solution :

Le problème posé est en effet un problème d'intersection :

$$y_1 = x^3 - 3x \qquad\qquad y_2 = p \qquad\qquad y_1 = y_2.$$

On peut l'examiner en tant que tel. Représentation graphique immédiate de $y_1 = x^3 - 3x$. On "coupe" ce graphe par celui de $y_2 = p$. On dégage immédiatement (visuellement) :

- une seule racine réelle pour $|p| > 2$,
- deux racines réelles dont une double pour $|p| = 2$,
- trois racines réelles pour $|p| < 2$.



Le graphe de y_1 est celui d'une fonction impaire : symétrie centrale de centre O. Il est alors évident que le problème posé est pair par rapport au paramètre p et qu'il suffit donc de l'étudier pour $p \geqslant 0$.

Minimum :

Hors le cas $|p| > 2$ où, carré de l'unique racine, $f(p)$ est

positif, les racines extrêmes sont de signe contraire et f(p) est négatif. Le minimum n'est donc à rechercher que pour $|p| \leqslant 2$.
Soient $a < b < c$ les trois racines réelles.
Par les relations entre les coefficients et les racines d'une équation, on écrit :

$$a + b + c = 0 \text{ et } ac + b(a + c) = -3.$$

On en déduit : $a + c = -b$ et $ac = -3 + b^2$.
Or, $f(p) = ac$.
Il est donc clair que le minimum de f(p) est égal à -3 et atteint pour $b = 0$, qui correspond à $p = 0$. On peut construire le graphe de y : f(p)...

Cas $p > 2$...

La fonction y_1 définit une bijection croissante de $]2, +\infty[$ sur $]2, +\infty[$. L'unique racine réelle de l'équation peut se définir par $y_1^{-1}(p)$ et on peut construire le graphe de f(p) en deux étapes sur $]-2, +\infty[$...
- d'abord en construisant, par symétrie par rapport à la première bissectrice $(y = x)$ le graphe de $y_1^{-1}(p)$,
- puis en déduisant celui de $f(p) = [y_1^{-1}(p)]^2$.

Cas $0 \leqslant p \leqslant 2$...:

On retient de l'étude du minimum : $f(p) = -3 + b^2$ où b représente la racine "médiane" de l'équation examinée. On note que b peut se lire sur l'arc $-1 \leqslant x \leqslant 1$ du graphe de y_1.
Mais y_1 définit une bijection décroissante y_{1*} de $[-1, 0]$ sur $[0, 2]$ et on peut donc lire $b = y_{1*}^{-1}(p)$ pour $0 \leqslant p \leqslant 2$.
On peut donc lire : $f(p) = -3 + [y_{1*}^{-1}(p)]^2$.
On peut donc construire en trois temps le graphe de la restriction de $y = f(p)$ à l'intervalle $[0,2]$:
- symétrique par rapport à $y = x$ du graphe de la restriction de y_{1*} de y_1 à $[-1, 0]$ pour mettre en place le graphe de $y_{1*}^{-1}(p)$;
- tranformation de ce graphe par $(x,y) \rightarrow (x,y^2)$;
- transformation du graphe obtenu par la translation $(x,y) \rightarrow (x,y-3)$.

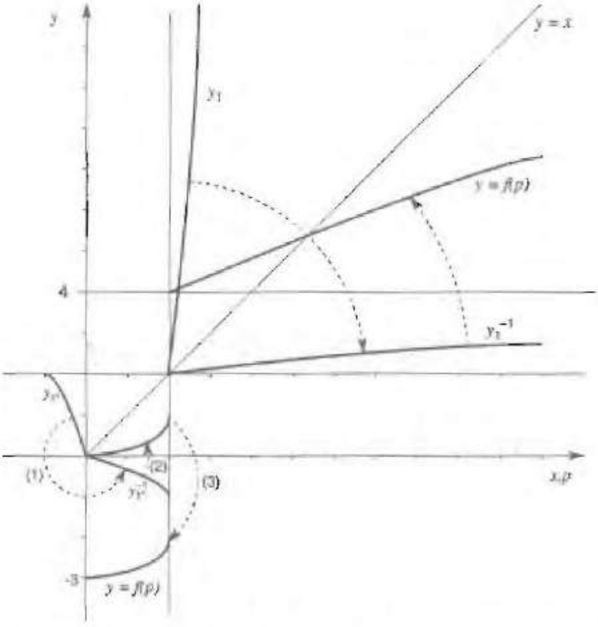
Bilan :

On a construit par morceaux le graphe de la restriction de $y = f(p)$ à $\mathbb{R}+$
On complète par symétrie par rapport à y'Oy pour avoir le graphe complet.

La deuxième démarche (hors résolution effective de l'équation du troisième degré) est-elle réellement (plus) "simple" ?

Elle suppose des connaissances moins "spécifiques" que la première sans doute et sa pertinence s'impose de fait pour la recherche du minimum.

Mais si elle est de nature à fournir un graphe techniquement convenable



de y = f(p) à partir de celui de $y = x^3 - 3x$, elle n'épuise pas le problème de la de la définition calculatoire explicite de la fonction $p \mapsto f(p)$ et n'enlève pas par là totalement son intérêt au calcul plus lourd qui la précède.

On peut trouver à ce problème une solution arithmétique :
2 et 5 étant premiers entre eux, 5q – 2p prend toutes les valeurs de $\mathbb{Z}$ quand p et q parcourent $\mathbb{Z}$.

On en déduit que, pour $\alpha = 1/2$, $|5q - 2p - \alpha| \geqslant 1/2$, l'égalité étant atteinte par les couples (5k, 2k) et (5k + 2, 2k + 1).

Alors $\dfrac{|5q - 2p - \alpha|}{\sqrt{29}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{29}}$ et $r = \dfrac{1}{2\sqrt{29}}$,

sachant que $\dfrac{|5q - 2p - \alpha|}{\sqrt{29}}$ est la distance du point de coordonnées (p,q) à la droite d'équation $-2x + 5y - \alpha = 0$.