Un exercice émoustillant de calcul des probabilités

Edith Kosmanek
Université Paris I

Le chef des services de renseignement de SYLDAVIE souhaite que deux de ses agents, à Paris, se rencontrent discrètement. Il leur demande de se rendre, le premier lundi de chaque mois entre 17 h et 18 h, sous l'horloge GARNIER de la gare de PARIS-LYON, en variant leur instant d'arrivée. Le premier venu a pour consigne d'attendre l'autre un temps $t \in [0,1]$ et de repartir au bout de ce temps, même s'il n'a pas vu l'autre.

On suppose que l'instant d'arrivée de chaque agent est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervale [17,18], ramené à [0,1].

Calculer le temps t de sorte que les deux agents se rencontrent au moins une fois par trimestre avec une probabilité $p = 0{,}95$.

Solution

On note :

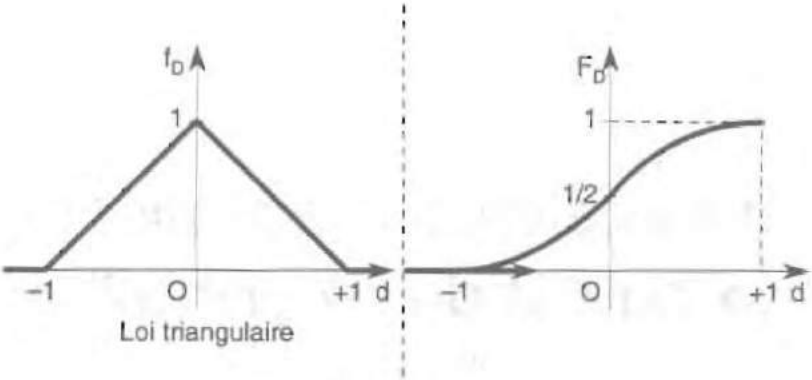
X (resp. Y) l'instant d'arrivée de l'agent A_1 (resp. A_2).

D = X – Y la durée qui sépare les deux arrivées.

R l'événement "rencontre au cours d'un mois donné".

La loi de probabilité de la v.a. D différence de deux v.a. uniformes indépendantes, est une loi triangulaire sur $[-1, +1]$; sa densité f_D est donnée par :

$$f_D(d) = \int_R f_X(x)\, f_Y(x-d)\, dx = \int_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le x-d \le 1}} dx = (1 - |d|).\, 1_{[-1,+1]}(d)$$



On a donc :

$$P(R) = P(-t \le D \le +t) = \int_{-t}^{+t} f_D(x)\, dx$$

$$= 2\int_0^{+t} (1-x)\, dx = 1 - (1-t)^2$$

$$\Rightarrow p = 1 - [1 - P(R)]^3 = 1 - (1-t)^6 = 0{,}95.$$

L'équation $(1-t)^6 = 0{,}05$ admet une seule solution dans $[0,1]$, à savoir : $t = 0{,}4$, soit un temps d'attente maximal de 24 minutes.

Biliographie

BOUZITAT-PAGES, *Statistique. Ed. Cujas.*