Remarques à propos de la Formule fondamentale des intérêts composés

Yves Husset
Dijon

La formule fondamentale des intérêts composés est :

$$C_t = C_0(1+i)^t \qquad (1)$$

dans laquelle C_t est la valeur acquise au bout du temps t par un capital C_0 placé au taux d'intérêt i. (voir notamment [1], [2], [4]).

Dans un article publié il y a près d'un siècle, dans le *Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuaires français* [3], Hermann LAURENT, fils du chimiste Auguste LAURENT et actuaire de profession, a donné une justification de cette formule dans une présentation originale qui mérite d'être reprise.

LAURENT procède en deux étapes : tout d'abord, il explique pourquoi, pour tout t donné, C_t doit être *proportionnel* à C_0 ; ensuite, s'agissant de la prise en compte du temps, il montre que $f(t)$ doit être de la forme $(1+i)^t$.

Première étape :

Soit C_0 le capital initial placé à la date 0 (origine) et C_t la valeur acquise à la date t. Supposons qu'il n'y ait pas proportionnalité entre C_t et C_0. Deux cas de figure sont à envisager :

• Si le capital $mC_0 > C_0$ rapportait un intérêt supérieur à m fois ce que rapporterait le capital C_0, les prêteurs s'associeraient pour prêter des capitaux plus importants et se partageraient les bénéfices de l'opération.

• Si, à l'inverse, le capital mC_0 rapportait un intérêt inférieur à m fois l'intérêt produit par le capital C_0, les prêteurs scinderaient leurs capitaux ou feraient appel à des hommes de paille. En conséquence, on est conduit à poser :

$$C_t = C_0 f(t) \qquad (2)$$

Deuxième étape :

Il reste à expliciter la fonction f. Au temps t, le prêteur recevra $C_0 f(t)$. Or, l'intervalle de temps $[0,t]$ peut être découpé en n parties : $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ telles que $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = t$. Le prêteur peut placer son capital C_0 pendant le temps θ_1 et son capital deviendra $C_0 f(\theta_1)$. Ce montant pourra alors être retiré et replacé aussitôt pendant le temps θ_2 de sorte que le capital deviendra $C_0 f(\theta_1) f(\theta_2)$ et ainsi de suite. En définitive, le capital placé sera devenu $C_0 f(\theta_1) f(\theta_2) \dots f(\theta_n)$, montant qu'il convient donc de comparer avec $C_0 f(t)$.

En tout état de cause, ainsi que le souligne LAURENT, une telle situation est source de "conflit continuel, déplacements et replacement perpétuel de capitaux, perte de temps et d 'argent". Pour éviter tous ces désagréments, la solution s'impose : choisir une fonction f telle que si l'on interrompt l'opération à un instant intermédiaire quelconque - en le retirant et en le replaçant aussitôt -cela n'entraîne *ni avantage, ni désavantage*.

S'il est indifférent de retirer $C_0 f(t)$ *in fine* ou de procéder à des interruptions, cela se traduit mathématiquement par :

$$C_0 f(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) = C_0 f(\theta_1) f(\theta_2) \dots f(\theta_n)$$

ce qui revient à résoudre *l'équation fonctionnelle :*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k\right) = \prod_{1}^{n} f(\theta_k) \qquad (3)$$

La résolution de cette équation est classique.

Considérons d'abord l'équation fonctionnelle :

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. (4)

On démontre que, *si l'on suppose la solution continue*, elle est nécessairement de la forme : $f(x) = Cx$ (C constante arbitraire).

Considérons maintenant l'équation fonctionnelle :

$f(x_1 + x_2) = f(x_1)\,f(x_2)$. (5)

On voit que l'on se ramène à (4) en prenant les logarithmes, ce qui est toujours possible puisque la fonction reste positive :

$$f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0 \qquad \text{et l'on trouve } f(x) = a^x\,;$$

l'équation (5) est caractéristique de la fonction exponentielle.

Pour en revenir à la question posée par Laurent, il vient :

$$f(t) = e^{ct} \qquad (c \text{ étant une constante})$$

et, en posant $e^c = 1 + i$, $C_t = C_0(1 + i)^t$.

L'exemple du "LIVRET A" des Caisses d'Epargne Françaises

Le fonctionnement du Livret A peut être observé à la lumière de ce qui précède. *A l'heure actuelle*, le principe en est le suivant : les intérêts sont capitalisés le 31 décembre et, en cours d'année, le décompte est fait *à intérêts simples*, les intérêts partant du 1er ou du 16 de chaque mois après le jour du versement et cessant de courir à partir du 1er ou du 16 qui précède le jour du remboursement.

Le mode de calcul à "intérêts simples" n'est pas du tout satisfaisant *au plan théorique* car il ne respecte pas la règle posée par Laurent (*supra*, 2ème étape). En effet, supposons que le capital C_0 soit retiré avec les intérêts au bout du temps θ_1, redéposé aussitôt et retiré définitivement avec les intérêts au bout d'une durée θ_2. Le prêteur retirera donc :

$$C_0(1 + i\theta_1)(1 + i\theta_2) = C_0[1 + i(\theta_1 + \theta_2] + C_0 i^2 \theta_1 \theta_2$$

alors que, *sans interruption du processus*, le produit de l'opération n'aurait été que de : $C_0[1 + i(\theta_1 + \theta_2)]$. Il en résulte ainsi un gain égal à $C_0 i^2 \theta_1 \theta_2$ et il n'est donc plus indifférent que l'opération financière soit interrompue ou non.

Sur le plan pratique, il faut toutefois remarquer que le système "quinzaines" perturbe le mécanisme. Ce système fait penser à celui les "dates de valeurs" mis en place par les banques : la date de valeur introduit un décalage entre la date où une opération a été effectuée et celle où elle est prise en compte. Très décrié, le système des dates de valeurs a été censuré à plusieurs reprises par la Cours de Cassation ("*Le Monde*", 26 janvier 1995) : ce décalage - qui est mis à profit par les banques pour placer les dépôts - n'a, en effet, pas de justification, tout au moins pour les mouvements d'espèces.

Mais même si le système des "quinzaines" venait à être aboli, il est clair que les complications liées à une ouverture et fermeture continuelles du livret font que le jeu n'en vaudrait pas la chandelle.

Bibliographie

[1] FINETTI Bruno, *Leçons de mathématiques financières*, Dunod, 1969.

[2] HUSSET Yves, *Calcul du taux effectif global d'un prêt à amortissement échelonné : état de la question*, *Bulletin* APMEP n° 386, décembre 1992.

[3] LAURENT Harmann, *Note sur une propriété de la loi de l'intérêt*, Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuaires Français, 1897, t. 7, p. 55-56.

[4] SAADA Maurice, *Mathématiques financières*, Que sais-je ? n° 2192, PUF, 1991.

Voici précisément le texte de Hermann LAURENT.

Note sur une propriété de la loi de l'intérêt

Je veux montrer que la formule

$$C = C_0 (1 + i)^t$$

qui sert à calculer la valeur C acquise par un capital C_0 au bout du temps t, s'impose et qu'il serait impossible aux financiers de faire usage d'une autre formule.

D'abord je dis que pour un temps donné fixe, C doit être proportionnel à C_0. En effet, si C_0 venant à doubler, par exemple, C ne doublait pas, il augmenterait dans une proportion plus forte ou plus faible, dans le premioer cas, les gens qui placent des capitaux s'associeraient pour placer de plus fortes sommes et partager les bénéfices ; dans le second cas, ils scinderaient leurs capitaux pour en placer les fractions séparément.

Nous sommes ainsi conduits à la formule :

$$C = C_0 f(t) ;$$

je dis que $f(t)$ doiot être de la forme $(1 + i)^t$; en effet, raisonnons sur l'unité de capital ; les gens qui placent leur argent cherchent à lui faire rapporter le plus possible dans le temps t ; s'ils y trouvent leur avantage, ils partageront ce temps en portions θ_1,

$\theta_2 \ldots \theta_n$ telles que

(1) $$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n = t$$

et ils s'arrangeront de manière à rendre la somme

(2) $$f(\theta_1) f(\theta_2) \ldots f(\theta_n)$$

qui sera la valeur du capital 1 au temps t, maximum, ce qui revient à rendre $\log f(\theta_1) + \log f(\theta_2) \ldots$ maximum ; pour cela, il faudra poser

$$\frac{f'(\theta_1)}{f(\theta_1)} d\theta_1 + \frac{f'(\theta_2)}{f(\theta_2)} d\theta_2 \ldots = 0,$$

$$d\theta_1 + d\theta_2 + \ldots = 0,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{f'(\theta_1)}{f(\theta_1)} = \frac{f'(\theta_2)}{f(\theta_2)} = \ldots$$

Admettons que le banquier de son côté fasse le même calcul pour rendre l'expression (2) minima ; il y aura conflit continunel, déplacements et replacements continuels de capitaux, perte de temps et d'argent auxquel on ne pourra remédier qu'en choisissant une forme de fonction f telle que l'expression (2) ne puisse jamais être maxima ou minima, quel que soit le mode de subdivision du temps t.

Pour que l'expression (2) ne soit jamais un maximum ou un minimum, il faut que sa différentielle seconde soit nulle ou que l'on ait :

$$\Sigma \frac{f''(\theta_i) f(\theta_i) - f'^2(\theta_i)}{f^2(\theta_i)} d\theta_i^2 = 0,$$

et cela, quel que soit le mode de subdivision de t.

Il faudra alors que, quel que soit θ, on ait :

$$f''(\theta) f(\theta) - f'^2(\theta) = 0,$$

d'où l'on tire successivement :

$$\frac{f''(\theta)}{f'(\theta)} - \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = 0,$$

$$\log f'(\theta) - \log f(\theta) = \log c,$$

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = c,$$

$$\log f(\theta) = c\theta + c'$$

$$f(\theta) = e^{c\theta+c'} \qquad c \text{ et } c' \text{ désignant des constantes ;}$$

comme $f(\theta) = 1$ pour $\theta = 0$, on a :

$$f(\theta) = e^{c\theta},$$

et en posant $e^c = 1 + i$,

$$f(\theta) = (1 + i)^{\theta}.$$

C'est ce que je voulais prouver.

H. LAURENT, *Membre agrégé.*

Yves Husset va mettre en pratique sa réflexion en adressant au Ministère des Finances une lettre de demande d'explications concernant, entre autres, la méthode de calcul des intérêts sur le livret A.

Monsieur le Directeur,

J'ai l'honneur de vous faire connaître que je désirerais obtenir des précisions sur la réglementation applicable aux livrets A des caisses d'épargne.

1) La méthode de calcul des intérêts :

Les caisses d'épargne décomptent les intérêts qui courent tout au long de l'année selon la méthode des intérêts simples. Cette méthode, qui a certes le mérite de la simplicité apparente, n'est pas satisfaisante sur le plan théorique. En effet, dans un tel système, le prêteur est incité à retirer le montant de son placement (capital et interêt) au bout d'un court laps de temps (une quinzaine de jours par exemple) et à le replacer aussitôt pour une nouvelle durée réduite et ainsi de suite.

Je désirerais savoir si *juridiquement*, un titulaire de livret A pourrait clôturer son livret au bout de quinze jours et retirer les fonds puis ouvrir aussitôt un autre livret pour une nouvelle quinzaine puis clôturer le nouveau livret et procéder ainsi jusqu'à la fin de l'année.

La demande est classée, mais la réponse de la Direction du Trésor est sans appel.

Voici donc la réponse de la Direction du Trésor.

MINISTERE DE L'ECONOMIE
ET DES FINANCES

DIRECTION DU TRESOR

Monsieur,

En réponse à votre demande, vous voudrez bien trouver ci-joints les éléments de réponse à vos questions concernant la réglementation applicable aux livrets A des caisses d'épargne.

La méthode de calcul des intérêts

– Il convient de rappeler que la capitalisation des intérêts à un rythme infra-annuel est prohibée par l'article 1154 du code civil, qui régit l'anatocisme (intérêts des intérêts). Cette règle est d'ordre public. A défaut d'un tel encadrement, les intérêts nominaux seraient dépourvus de toute portée réelle.

– Pour ce qui concerne les livrets de caisse d'épargne (caisse d'épargne et de prévoyance et Caisse nationale d'épargne), la règle de capitalisation annuelle des intérêts est édictée à l'article 6 du code des caisses d'épargne (qui prévoit une capitalisation au 31 décembre). Cela étant, il s'agit d'une règle d'application beaucoup plus générale : c'est ainsi notamment que l'article 1er de la décision de caractère général n° 69-12 du 8 mai 1969 du Conseil national du crédit édicte une règle technique pour les livrets bancaires.

– Le risque de détournement évoqué (clôtures répétées du livret A par le titulaire suivies immédiatement de l'ouverture d'un nouveau livret) semble purement théorique. Si elles s'étaient produites, de telles opérations n'auraient en effet pas manqué d'attirer l'attention des établissements concernés (caisses d'épargne ou bureaux de poste) et tel n'a pas été le cas.

- Au demeurant, le titulaire qui effectuerait de telles opérations tous les quinze jours ne pourrait pas prétendre au versement d'intérêts en raison de la règle de calcul des intérêts par quinzaines, qui prévoit que l'intérêt servi aux déposants part du 1er ou du 16 de chaque mois après le jour du versement et cesse de courir à la fin de la quinzaine précédant le jour du remboursement (article 6 du code des caisses d'épargne).