Bulletin de l'APMEP n°412 - Sept/Oct 1997

# Dossier Ecole Elémentaire

# Qu'est-ce que les Mathématiques concrètes ?

**Marie Berrondo-Agrell**
Paris

*On utilise à l'école primaire, beaucoup de termes concrets pour parler mathématiques.*

*Nous compléterons donc ce dossier par l'article de Marie BERRONDO-AGRELL sur les "Mathématiques concrètes" qui trouve tout naturellement ses exemples dans des problèmes posés à l'école élémentaire.*

*On relira utilement aussi à ce propos "Quel est l'âge du capitaine" par l'équipe "Elémentaire" de l'IREM de Grenoble paru dans "Grand N" n° 19 et aussi dans le Bulletin APMEP n°323 d'avril 1980.*

## 1 - Introduction

On parle souvent de « *MATHÉMATIQUES CONCRÈTES* » tantôt avec dédain tantôt avec enthousiasme. Mais de quoi s'agit-il ?

Est concret en effet, ce qui est ressenti par les sens.

Nous distinguerons donc ici :

1) Le problème posé sans l'utilisation d'aucun terme mathématique (récit concret), et où la théorie arrive comme un outil.

2) Le problème où l'on utilise une représentation matérielle, souvent un dessin, pour appliquer une théorie (la vue ou le toucher nous guideront alors).
3) L'art de suivre un algorithme précis, et en particulier le calcul arithmétique ou matriciel, la méthode statistique et l'informatique (une certaine facilité donne l'illusion du concret).

## 2 - Problème posé sans utilisation de termes mathématiques

### a) La vie réelle

De nombreux problèmes se posent à chaque instant dans la vie privée et professionnelle, depuis la ménagère qui fait son marché jusqu'à l'ingénieur aéronautique qui étudie la forme de l'aile d'un nouvel avion. On ne peut en effet éviter les mathématiques dans la vie quotidienne et les mathématiques ont même été développées à partir de la vie pratique. Il s'agit donc là d'une forme de ***mathématiques concrètes*** qui sont à la fois la cause et le but principal des mathématiques.

### b) Le problème simplifié

Pour résoudre les problèmes réels, une préparation s'impose par de nombreux exercices qui relèvent d'éléments théoriques précis. Il s'agit d'une simplification artificielle de la réalité dans un but pédagogique. De tels problèmes existent par milliers dans tous les manuels classiques d'enseignement.

*Exemple :*

Dans une certaine boulangerie, deux croissants et une brioche coûtent 15 F. Trois brioches et un croissant coûtant 17,50 F, on demande :
1°) Combien coûte une brioche ?
2°) Combien coûte un croissant ?

### c) Le jeu mathématique

Certains de ces problèmes simplifiés représentent un but en eux-mêmes et ne sont pas seulement la préparation à des problèmes plus difficiles : ce sont les jeux mathématiques. Ils doivent être, par définition, un plaisir de l'esprit. Pour cela, chacun doit comporter, ou bien une astuce dans la solution qui le rende très facile alors qu'il a l'air très difficile, ou bien une certaine beauté dans l'énoncé qui le rende « appétissant ». Un certain manque de précision dans le texte doit par contre être d'avance accepté. Un jeu mathématique respectera impérativements les règles suivantes :
1) Aucun (ou presque aucun) terme mathématique ne doit être présent dans la donnée.
2) Il ne doit y avoir qu'une seule question par problème (il est naturel d'avoir

un seul sujet de préoccupation majeur à la fois, les autres difficultés apparaîtront comme des conséquences successives).

3) Le niveau mathématique requis doit être assez peu élevé (rarement dépasser le niveau du baccalauréat, et lui être souvent très inférieur).

4) L'ensemble doit se trouver, autant que possible, dans un climat d'humour et de poésie, avec des mots très simples et une apparence naïve (voir §. 9 et 10). Un titre percutant est souhaitable.

*En voici un exemple typique :*

CHIEN-PHOQUE

Si 4 chiens mangent 4 seaux de poissons en 4 jours et que 3 phoques mangent 3 seaux de poissons en 3 jours, qui mange le plus, un chien ou un phoque ?

## 3 - La représentation matérielle d'une théorie

La représentation matérielle d'une théorie est également appelée [Adda 1] *« Mathématiques concrètes »*. Nous trouvons là des éléments très différents.

### a) Représentation matérielle

Ce sera d'abord la représentation matérielle, ordinaire ou aléatoire, et surtout le dessin, graphes de tous genres ou figures géométriques.
Observons tout d'abord :

*1) L'expérience ordinaire :*

La maîtresse d'école donne 2 pommes à Maud et 3 à Louis, puis demande à Rémi combien cela fait de pommes en tout. Elle espère ainsi faciliter la compréhension de la propriété : $2 + 3 = 5$.
Bien sûr, l'enfant peut aussi se concentrer sur la couleur des pommes ou leur différence de taille, ou encore sur les propriétés biologiques des pommes etc., mais il serait certainement facile de prouver, avec quelques statistiques à l'appui, que le niveau moyen de compréhension général est extrêmement amélioré par cette expérience matérielle très simple.

On pourra en effet refaire des expériences similaires avec des poires, puis avec les doigts de la main. L'esprit passera alors naturellement de la multiplicité des expériences à l'abstraction.

Il existe d'ailleurs des matériels de jeux ainsi prévus dans un but purement pédagogique : les blocs logiques par exemple (64 morceaux de plastique définis par leurs 4 formes, leurs 4 couleurs, leurs 2 tailles et leurs 2 épaisseurs).

*2)* N'oublions pas un autre type d'expérience matérielle : c'est ***l'expérience aléatoire***.

L'enseignant qui présente la loi binomiale demandera peut-être à chacun de ses 32 élèves de lancer 4 pièces de monnaie et recueillera sur un graphique le nombre d'élèves ayant obtenu $x$ faces, $x$ variant de 0 à 4. Puis il comparera la courbe empirique à la courbe théorique. La mémoire de l'élève étant ainsi fixée, il cherchera davantage l'explication de ce phénomène que s'il n'avait pas été ainsi sensibilisé.

**b) Représentation par dessin**

La représentation la plus fréquente d'une théorie se fera par le dessin. Mais d'abord, ***comment définir un dessin ?***
Nous pouvons ici adopter l'optique eulérienne (graphes orientés ou non orientés, diagrammes de Venn simples ou généralisés[1], arbres), ou l'optique euclidienne (dessins géométriques, courbes analytiques). On voit là toute l'utilité d'une connaissance de la base de la théorie des graphes.
Pour présenter les lois de De Morgan, ou le théorème de Bayes, l'enseignant pourra s'aider d'un diagramme de Venn. Pour présenter la théorie de la décision, il s'aidera sans doute d'un arbre. Et pour présenter la définition d'une application réflexive, un graphe orienté (« avec des boucles partout » : cf. Adda 2).
Pour démontrer ensuite que la somme des angles d'un triangle fait 180°, il s'aidera d'une figure géométrique. Il associera aussi un vecteur à 2 dimensions à une flèche particulière. Et pour trouver enfin l'équation de la tangente à la parabole « $y = x^2$ » en son point d'intersection avec la droite d'équation « $y = x + 2$ », il tracera sans doute les graphes des fonctions correspondantes.

## 4 - Algorithmes

On appelle aussi à tort [Adda 1] « ***Mathématiques concrètes*** » l'art de suivre un ***algorithme*** précis, qu'il s'agisse d'addition, de division, de calcul statistique ou de multiplication matricielle par exemple. L'élève suit en effet alors des règles précises successives et son esprit ne fait pas appel à l'imagination. Il retrouve là une sorte de confort intellectuel, peut-être quelque peu similaire à celui qu'il ressentait (cf. [3]) lorsque son imagination sur des sujets théoriques pouvait s'aider d'un dessin. C'est ainsi qu'un enfant de 8 ans saura dire que « 27 + 14 = 41 » alors qu'il est encore trop jeune pour aborder la véritable abstraction.

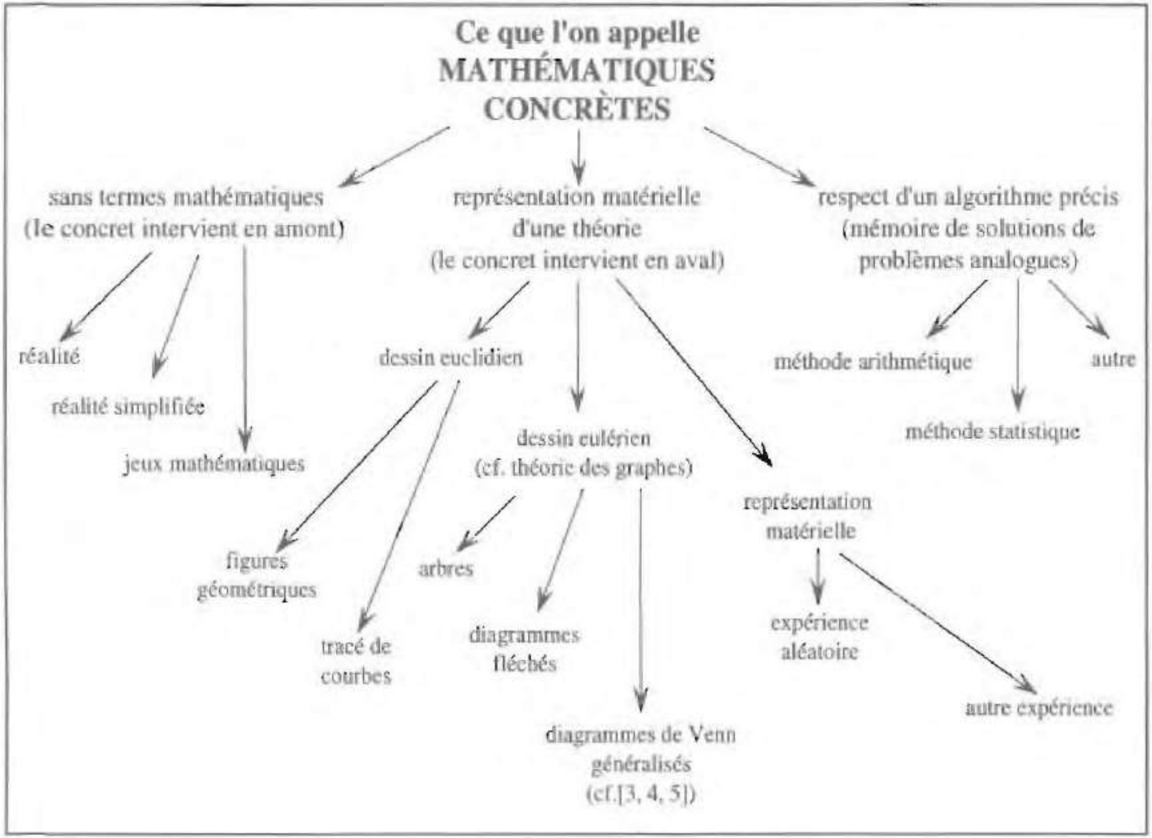
## 5 - Récapitulation

Nous récapitulons ici l'ensemble de tout ce qui est usuellement appelé « ***Mathématiques concrètes*** », en utilisant justement l'un de ses procédés

[1] Voir [3, 4, 5].

classiques : l'arbre, graphe connexe dont le nombre de sommets est supérieur d'une unité à son nombre d'arêtes.

Le voici :



## 6 - Conclusion

Après avoir ainsi récapitulé ce qu'on appelle usuellement « ***Mathématiques concrètes*** », il ne nous reste plus qu'à examiner leurs bienfaits et leurs méfaits. Tout dépend de la perspective que l'on adopte. Faut-il savoir appliquer les mathématiques dans la vie quotidienne avec exactitude, rapidité, facilité ? N'est-il pas plus important de savoir raisonner de façon abstraite entre des séries d'axiomes, en les ayant en permanence en mémoire, et en les maniant avec logique et imagination sans aide graphique ? Il s'agit là d'une question d'éthique et nous ne saurions y répondre. Nous y répondrons d'autant plus difficilement que les frontières entre ces deux genres de mathématiques sont parfois floues.

Si les mathématiques non concrètes nous semblent s'adapter au mieux à la deuxième prespective (cf. [10]), les mathématiques concrètes sont au contrairement certainement plus appropriées à la première perspective. En effet, nous avons vu dans le premier type examiné (§ 2) l'étude du lien avec la vie réelle.

Dans le deuxième type examiné (§ 3), nous avons vu l'art d'utiliser les procédés matériels, et en particulier le dessin, pour faciliter la mémorisation permanente des axiomes utilisés, et l'imagination des raisonnements correspondants. Comme le dirait A.GERINET ([7]), la « compréhension explication » et la « compréhension application » sont ainsi améliorées.

Dans le troisième type enfin, il ne s'agit plus que de suivre des règlements successifs attentivement pour être sûr d'arriver au bon résultat.

Bien sûr, ces trois types de mathématiques peuvent ne pas convenir à certaines formes mentales. L'esprit abstrait par excellence sera gêné par toute forme de dessin par exemple. Il ne verra là que de nouvelles difficultés supplémentaires et inutiles.

Il y a aussi l'esprit concret par excellence qui ne verra pas le passage vers l'abstrait.. *Citons cette histoire véridique.*

« Dans une classe, les 2 cinquièmes des élèves préfèrent l'anglais, les 3 septièmes la gymnastique, les 2/35$^{\text{èmes}}$ la biologie, les autres le dessin.

Quelle est la matière la plus aimée ?

- La gymnastique, répond Sébastien qui excellait dans cette matière.

On lui expliqua alors la beauté de la mise au même dénominateur. Le résultat final était néanmoins la gymnastique.

« A quoi bon tous ces calculs pour aboutir à un résultat que j'avais donné tout de suite ? » dit-il.

N'oublions pas enfin l'esprit intellectuellement rebelle dont Astrid

LINDGREN (cf. [8] « Pipi Langstrump ») s'est fait l'écho et dont voici un extrait résumé :

| | |
|---|---|
| *La maîtresse :* | Combien font 7 + 5 ? |
| *L'élève :* | Si tu ne le sais pas toi-même, pourquoi te le dirai-je ? |
| *La maîtresse :* | Eh bien, je vais te le dire, cela fait 12. Mais dis-moi maintenant combien font 8 + 4 ?…Tu ne le sais pas ? Je vais donc te le dire : cela fait 12. |
| *L'élève :* | Mais tu m'as dit que 12, c'était « **7 + 5** », alors ne me dis pas maintenant que c'est « 8 + 4 » ! |
| *La maîtresse :* | Prenons un exemple : Gustave est allé en excursion avec 7 pommes. Lisa en avait 5. Combien cela fait-il de pommes en tout ? |
| *L'èléve :* | Il faudrait savoir si cela leur a fait mal au ventre de manger toutes ces pommes, où ils les avaient volées, etc… |

On voit là un échec complet des mathématiques concrètes autant que des mathématiques abstraites. Que faire alors ?

*C'est sur ce paradoxe que nous concluerons.*

## Bibliographie


[1] ADDA Josette : *L'incompréhension en Mathématiques et les malentendus.* Educational studies in mathematics 6 (1975) 311-326.

[2] ADDA Josette : *Representations in mathematics.* Actes PME Jerusalem 1983

[3] AGRELL PER et BERRONDO-AGRELL Marie : *Vers une syntaxe des diagrammes de Venn ; lutte contre un mythe.* Journal de la société de statistique de Paris n° 1 et n° 2 / 133ème année - 1992

[4] BERRONDO-AGRELL Marie : *Nouvelles démarches dans l'enseignement du calcul des probabilités.* Journal de la société de statistique de Paris / 1996 n° 3 - octobre 1996.

[5] BERRONDO-AGRELL Marie et FOURASTIE Jacqueline : *Pour comprendre les probabilités* - Hachette Collection *Les Fondamentaux* - 1994.

[6] BERRONDO-AGRELL Marie : *Eurêka, Géométriquement vôtre, Faites vos jeux, par Numérix et Logicologique.* 4 recueils de jeux mathématiques - Dunod 1994/1996.

[7] GERINET A. *Représentation mentale en pédagogie mathématique.* Retz 93.

[8] LINDGREN Astrid : *Pipi Langstrump*, traduit du Suédois sous le titre *FIFI BRINDACIER*, Livre de Poche - Jeunesse 1995.

[9] LUCAS Edouard : *Récréations mathématiques.* Ed. A. Blanchard 1977

[10] MARTIN GARDNER : *Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd* - Traduit de l'américain - Dunod 1977.

[11] PECASTAING F.-LAMBERT M.-PELLE J.F.- ZARA F. *Analyse - Exercices et problèmes* - Vuibert 1979.