Avis de recherche

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.

Veuillez envoyer vos questions et réponses avec une feuille par sujet et votre nom sur chacune et, si possible, une disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour immédiat) à :

Robert FERRÉOL
6, rue des annelets
75019 PARIS
ou à l'adresse internet du lycée d'Enghien : cabout@sancerre.ac-idf.jussieu.fr

Nouveaux avis de recherche

AVIS DE RECHERCHE n° 79 de R. Ferréol

Je recherche des références de travaux (ou énoncés de problèmes) concernant les extremums de la fonction de distance à une partie dans le plan.

AVIS DE RECHERCHE n° 80 de G. Canguilhem (Aubervilliers).

Dans la lignée de l'avis de recherche n° 13, (cf. *Bulletin* n° 394, p. 340), notre collègue propose de généraliser le problème qu'il avait posé à G. BOURGEOIS et J.P. LECHENE et qu'ils ont résolu dans le *Bulletin* n° 409 (p. 147), de l'étude du processus consistant à transformer un triangle inscrit dans un cercle en le triangle dont les sommets sont les points d'intersection des médianes du précédent avec le cercle, processus tendant rapidement vers une alternance de deux triangles équilatéraux centrés au centre du cercle et symétriques par rapport à ce centre.

Il s'agit de la généralisation à l'espace en remplaçant le cercle par une sphère, et le triangle par un tétraèdre (les médianes joignant les sommets au centre de gravité de la face opposée). G. CANGUILHEM propose de démontrer qu'il y a cette fois convergence vers une alternance de deux tétraèdres dont le centre de gravité est confondu avec le centre de la sphère (ils sont donc "équifaciaux").

AVIS DE RECHERCHE n° 81 de Abdoullah Vavoda (St Laurent du Maroni).

Considérons l'ensemble des restes de la division euclidienne d'un nombre premier par son rang. Cet ensemble est-il majoré ou, à l'opposé, égal à $\mathbb{N}$? Peut-on trouver trois nombres premiers consécutifs ayant le même reste ?

AVIS DE RECHERCHE n° 82 de Jean-Michel Macé (St-Brieuc).

Partant d'un entier naturel écrit en base 10 ou autre, on calcule la valeur absolue de sa différence avec le nombre ayant les mêmes chiffres en sens inverse, puis à ce nombre, on ajoute le nombre inversé, et ainsi de suite en alternant différence et somme.

Par exemple, 160 donne la suite :
160 ; 160 – 61 = 99 ; 99 + 99 = 198 ; 891 – 198 = 693 ; 297 ; 1 089 ; 8 712 ; 6 534 ; 10 890 ; 1 089 ; 10 890 ; etc.

On remarque que l'on aboutit soit à 0, soit à un cycle d'ordre 2. Peut-on le démontrer ? Comment caractériser les nombres n'aboutissant pas à 0 ?

AVIS DE RECHERCHE n° 83 de M. Deleham (Coconi, Mayotte).

Déterminer les hexagones dont le périmètre est supérieur à la somme des longueurs des diagonales.

ERRATUM : un x et un y se sont intervertis lors de la transmission de l'avis de recherche n°71 de M. DELEHAM.

J'observe que $\dfrac{x^n + 1}{x + 1} = \dfrac{y^m - 1}{y - 1}$ admet la solution $\begin{cases} x = 6,\ n = 5 \\ y = 10,\ m = 4 \end{cases}$

Existe-t-il d'autres solutions en entiers non triviales ?

Réponses aux avis précédents

Avis de recherche n° 41

Démonstration du théorème du sandwich au jambon (ou de la tartine beurre confiture) : étant donnés trois solides quelconques de l'espace, il existe un plan qui coupe chacun en deux volumes égaux (+ généralisation à $\mathbb{R}^n$).

Toujours pas de démonstration, mais j'ai supprimé "un et un seul (plan)" dans l'énoncé, bien que cela figure dans le dictionnaire des PUF car, même si l'on considère que les solides sont d'intérieur connexe, il n'y a pas unicité : Bernard CHARLES (Montpellier) donne le contre-exemple très simple de trois boules dont les centres sont alignés. Pourtant, lorsqu'un solide est d'intérieur connexe, il y a unicité du plan *de direction donnée* coupant ce solide en deux volumes égaux.

B. CHARLES donne aussi un contre-exemple pour le théorème des deux crêpes, version 2D de celui de la tartine : il suffit de prendre deux couronnes concentriques.

Mais peut-on trouver des conditions suffisantes d'unicité ? B. CHARLES pense que "convexes disjoints" devrait suffire en dimension deux (mais évidemment pas en dimension trois).

Avis de recherche n° 49 sur l'origine du mot affine.

Toujours pas de réponse, mais des interrogations d'Anne SOURIAU (professeur de philosophie, Versailles) :
Pourquoi dites-vous un plan affine et non un plan affin ? Est-ce que pour les mathématiciens les adjectifs sont invariables et ne distinguent par le masculin et le féminin ? "AFFIN" est pourtant un adjectif, parfois un substantif sous sa forme masculine, utilisé hors du domaine mathématique ; Chateaubriand dit "des affins".
N.D.L.R. : mon opinion, mais je n'ai aucune preuve, est que *affin* a fait un détour par l'anglais (où *fin* se dit *fine*) et n'a pas reperdu son e en revenant au français…

Avis de recherche n° 66 sur les graduations de boussoles allemandes :

	N	E
Grad(°)	0	90
Neugrad (gr)	0	100
A‰	0	1600
Strich (')	0	1600 (plutôt 8)

Réponses de Pierre BARNOUIN (Cabris), Wulfram GIORGI (St-Lô), Jean LEFORT (Wintzenheim), Michel SARROUY (Mende).

Degré et grade ont la même origine latine : *gradus*. Mais l'allemand n'a pris que la forme savante : Grad. D'où Grad = degré, Neugrad (nouveau degré) = grade. Jean LEFORT fait remarquer que le grade a l'avantage d'être lié au mètre : un grade le long d'un méridien vaut 100 km.

A‰ est l'abréviation de millième d'artillerie. Le millième vrai est égal à un millième de radian, de sorte que l'angle droit vaut 1 570,796… millièmes vrais. Les artilleurs ont arrondi à 1 600. W. GIORGI fait remarquer que cette unité est utilisée en artillerie car elle correspond à peu près à la valeur de l'angle sous lequel on voit une hauteur d'un mètre à un kilomètre.

Les collègues affirment qu'un angle droit n'est pas égal à 1 600 "Striche", mais à 8, de sorte que le Strich est la 32$^{\text{ème}}$ partie du cercle, 1 Strich = 11,25°. Cette unité provient de la division classique de la rose des vents, et s'appelle en français une "aire de vent" ou un "rhumb" (de l'anglais).

Avis de recherche n° 68 demandant des ouvrages publiant les formules :

$$\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{\sin x} = 4\sin(60° + x)\sin(60° - x) \\ \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 4\cos(60° + x)\cos(60° - x) \\ \dfrac{\tan 3x}{\tan x} = \dfrac{\tan(60° - x)}{\tan(30° - x)} \end{cases}$$

ainsi que :

$$\frac{\tan 24°}{\tan 6°} = \frac{\tan 42°}{\tan 12°} = \frac{\tan 54°}{\tan 18°} = \frac{\tan 72°}{\tan 36°} = \frac{\tan 78°}{\tan 48°} = \frac{\tan 84°}{\tan 66°} = 2 + \sqrt{5}\ .$$

Réponse de François LO JACOMO qui n'a pas de référence, mais des démonstrations. Les deux premières formules résultent des formules méconnues :

$$\sin(u + v + w) = \sin u + \sin v + \sin w - 4\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v+w}{2}\sin\frac{w+u}{2}$$

$$\cos(u + v + w) = 4\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{v+w}{2}\cos\frac{w+u}{2} - \cos u - \cos v - \cos w$$

en posant : $x = u$, $v = x + 120°$, $w = x - 120°$.
On fait le quotient de la première par la deuxième pour obtenir la troisième.

Si l'on sait alors que le nombre d'or : $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos 36° = \dfrac{1}{2\cos 72°}$,

$$\frac{\tan 24°}{\tan 6°} = \frac{4\cos 66°\cos 6°}{4\sin 66°\sin 6°} = \frac{1 + 2\cos 72°}{1 - 2\cos 72°} = 2 + \sqrt{5},$$

$$\frac{\tan 42°}{\tan 12°} = \frac{4\cos 48°\cos 12°}{4\sin 48°\sin 12°} = \frac{1 + 2\cos 36°}{-1 + 2\cos 36°} = 2 + \sqrt{5},$$

$\dfrac{\tan 24°}{\tan 6°} = \dfrac{\tan 54°}{\tan 18°}$ résulte de $\dfrac{\tan 3x}{\tan x} = \dfrac{\tan(60° - x)}{\tan(30° - x)}$

avec $x = 6°$ et les trois autres expressions résultent des premières en prenant les complémentaires.

N.D.L.R. : J'ai cherché à généraliser la formule :

$$\cos(u + v + w) = 4\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{v+w}{2}\cos\frac{w+u}{2} - \cos u - \cos v - \cos w,$$

en la réécrivant sous la forme plus jolie (à mon goût) :
$\cos(a+b+c) + \cos(-a+b+c) + \cos(a-b+c) + \cos(a+b-c) = 4\cos a\cos b\cos c$
En itérant $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos a\cos b$, je suis tombé sur la formule

générale : $\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \cos(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots \varepsilon_n a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n$ ou, ce qui revient au même :

$$\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \cos(a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots \varepsilon_n a_n) = 2^{n-1} \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n$$

pour $n = 4$, on a par exemple :

$$\cos(a+b+c+d) + \cos(-a+b+c+d) + \cos(a-b+c+d) + \cos(a+b-c+d) + \cos(a+b+c-d) + \cos(a+b-c-d) + \cos(a-b+c-d) + \cos(a-b-c+d) = 8\cos a \cos b \cos c \cos d.$$

Quant à des références, peut-être les vieux livres de première…

J'en ai un dans lequel se trouve la jolie formule :

$\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \tan y \tan z = \dfrac{\sin(x+y+z)}{\cos x \cos y \cos z}$ et des dizaines d'autres (en exercices !).

Avis de recherche n° 69 : au jeu du pendu, faut-il proposer des mots courts ou des mots longs ?

Anne SOURIAU pense qu'interviennent ici d'autres facteurs que ceux que l'on retient dans un simple calcul de probabilités, comme dans "la lettre volée" d'Edgar Poe, où un enfant gagne toujours au jeu de pair et impair. Si le premier joueur connaît la formule ESARINTULO, classant les lettres par fréquence décroissante, il proposera des mots ayant un taux élevé de lettres telles que Y, W, K, quelle que soit la longueur de ces mots. Si l'adversaire connaît la formule, il proposera dans l'ordre les lettres de cette formule, ou alors des lettres rares, s'il sait que le premier joueur connaît la formule…

Avis de recherche n° 70 : Dans "*Asterix chez les Bretons*", les romaines légions se mettent en carré, puis en triangle, et enfin en disque. Combien y a-t-il de légionnaires ?

Deux collègues ont proposé des méthodes donnant les valeurs des nombres à la fois triangulaires et carrés : 1, 36, 1 225, 41 616, 1 413 721 etc., l'une informatique, pour P. BARNOUIN, l'autre en se ramenant à l'équation $n^2 + (n+1)^2 = k^2$.

Je signale que ce problème est traité en détail dans le livre d'arithmétique pour amateurs de Marc GUINOT, *une époque de transition : LAGRANGE ET LEGENDRE* (Ed.. Aléas).

P. BARNOUIN propose de répartir 36 légionnaires en trois cercles concentriques de six, douze et dix-huit hommes, en plaçant au centre leur "trente-six-turion", la position circulaire étant défensive. Lorsque les légionnaires sont en triangle ou en carré, le trente-six-turion est seul en tête.

Malheureusement, 36 légionnaires, ça ne fait pas une légion !

Dans le *Bulletin* précédent, J. Moreau de Saint Martin avait proposé de répartir les légionnaires en cercles concentriques de $6k$ hommes, mais il avait inclus l'homme central parmi les légionnaires. Il a démontré depuis, en utilisant la loi de réciprocité quadratique, qu'il n'y a alors pas d'autre solution que de mettre un seul légionnaire…

Avis de recherche n° 71.

Jean-Yves LE CADRE (Vannes) a envoyé une solution de l'énoncé faux : $\frac{y^n+1}{x+1} = \frac{y^m-1}{x-1}$, qui n'était pas inintéressant…

L'équation revient à $\frac{y^n+1}{y^m-1} = \frac{x+1}{x-1}$, où x et y sont des entiers $\geqslant 2$ ($x = y = 0$ étant une solution triviale). Puisqu'alors $1 < \frac{x+1}{x-1} \leqslant 3$, on a : $1 < \frac{y^n+1}{y^m-1} \leqslant 3$.

De $1 < \frac{y^n+1}{y^m-1}$ on tire $y^m - y^n < 2$.

Si $n < m$, on aurait $0 < y^n(y^{m-n} - 1)$, qui conduirait à $y^n(y^{m-n} - 1) = 1$ c'est-à-dire $y = 2$, $n = 0$ et $m = 1$, qui ne donne aucune solution en x. On en déduit donc que $m \leqslant n$. $m = n$ conduit aux solutions triviales.

Supposons donc $m < n$. Puisque $3 \geqslant \frac{y^n+1}{y^m-1} > y^{n-m}$, on en tire $y^{n-m} < 3$, avec $y \geqslant 2$, et $n - m \geqslant 1$. La seule possibilité est alors $y = 2$, $n - m = 1$.

L'équation devient $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2^n+1}{2^{n-1}-1}$, soit $x = \frac{3.2^{n-2}}{2^{n-2}+1}$, donc $2^{n-2} + 1$ divise 3. Seule la possibilité : $2^{n-2} = 3$, soit $n = 3$, qui conduit à $x = 2$ et $y = 2$.

La seule solution non triviale est donc $x = y = 2$, $n = 3$, $m = 2$.