L'Analyse en termes d'ordres de grandeur:

FONDEMENTS POUR UNE NOUVELLE PEDAGOGIE

Ou L'ART D'ENSEIGNER LA NOTION DE LIMITE EN L'AN DEUX-MILLE.

Robert LUTZ , Abdenacer MAKHLOUF et Etienne MEYER

Des fondements mathématiques permettant une Analyse rigoureuse et proche de l'intuition, à la manière du calcul infinitésimal de Leibniz, existent aujourd'hui. La brochure APMEP "Fondements pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur", en décrit une approche élémentaire et complète que cet article vous invite à goûter.

1. Introduction

Dans la section 1 des *Principia*, NEWTON s'intéresse à l'art, essentiel pour établir les lois du mouvement des corps solides, de déterminer "*les proportions ultimes entre grandeurs naissantes ou évanouissantes*". De son côté LEIBNIZ propose un *calcul infinitésimal* où, en introduisant des *règles de calcul sur des quantités infiniment petites* comme "*une manière de parler conforme à l'art d'inventer*", on pouvait aboutir aux mêmes résultats que Newton avec sa méthode des *fluxions*.

Cela se passait dans les années 80 du XVII^e siècle. La notion de limite et ses sous-produits, la continuité, les dérivées, les intégrales, les séries et tous les subtils raffinements de l'Analyse mathématique en sont issus. Mais les infinitésimaux, par ailleurs entourés d'une aura métaphysique propagée par leurs zélateurs les plus acharnés, n'ont pas survécu aux tentatives infructueuses, étalées sur près de deux siècles, pour les *définir* "dans le style d'Archimède", c'est-à-dire à l'aide des deux opérations et de la relation d'ordre sur les nombres réels. La notion de limite a échappé au naufrage parce qu'elle a enfin trouvé une telle définition au cours du XIX^e siècle, après bien des controverses. Et depuis, bon an mal an, on a enseigné non sans douleur le calcul des limites en se basant plus ou moins explicitement sur leur définition en termes "d'epsilon-delta" (de moins en moins explicitement d'ailleurs, à mesure que les études secondaires se sont généralisées). Est-il excessif de croire qu'en la fin de ce millénaire, on aura renoncé sous nos latitudes à enseigner une matière vidée de sa substance faute de trouver un auditoire attentif à en percevoir la subtile ordonnance ? Est-ce une fatalité ou peut-on inventer quelque parade ?

On pourrait prétendre qu'une pédagogie mieux adaptée saurait accomplir ce miracle. Mais n'a-t-on point déjà dépensé des trésors d'imagination pour cela ? Il semble bien que les efforts d'adaptation pédagogique conduisent à l'appauvrissement de la matière et à des artifices nouveaux qui l'éloignent de son objet premier. Est-ce le moment d'appliquer le même remède avec une énergie renouvelée ? Cette attitude n'est-elle pas la même qu'en d'autres lieux où l'application des anciennes recettes avec une vigueur nouvelle adjoint au mal des intérêts au principal ? La manière dont on piétine dans le traitement des grandes plaies de notre humaine condition ne montre-t-elle pas combien il est illusoire de vouloir résoudre un problème induit par la structure d'un certain contexte sans rien changer à ce contexte ?

Dans la question de l'enseignement des mathématiques, les trois modifications de contexte principales que l'on peut envisager sont les suivantes :

(i) changer la structure des classes : les mathématiques "sérieuses", c'est-à-dire celles qui dépassent la simple exécution d'un calcul, sont réservées à une élite restreinte.

(ii) supprimer dans les programmes tout ce qui n'est pas accessible à la grande majorité des élèves, en particulier les questions de limites.

(iii) changer l'Analyse.

Le changement (i) est tentant d'un point de vue technocratique, mais se heurte au fait que les notions de dérivée et d'intégrale, et plus généralement le raisonnement sur des entités abstraites ont trop d'applications pratiques dans tous les domaines, de plus en plus nombreux, où l'on applique la modélisation mathématique, pour que l'on puisse en réserver l'intelligence à une élite restreinte (que l'on sélectionnerait sur quels critères ?).

Le changement (ii) a les mêmes inconvénients, mais agit de manière plus diffuse. A moyen terme il n'y a même pas d'élite compétente à la sortie ...

Ainsi, si l'objectif est d'enseigner une notion de limite accessible au plus grand nombre sans concession sur le contenu scientifique de la matière, il nous reste à explorer le changement (iii).

Il ne peut s'agir ni d'une exploration de nature pédagogique, ni d'inventer une transposition didactique astucieuse de la notion de limite. Il faut donc chercher la base du changement dans le contenu scientifique évoqué plus haut !

Or depuis un siècle, les fondements de la mathématique ont été fortement clarifiés. La théorie des ensembles codifiée par ZERMELO et FRAENKEL représente un contexte de référence formel communément admis pour la pratique mathématique. Jusque vers les années 60, on pensait que les vieilles notions infinitésimales n'avaient pas de place dans ce contexte. C'est alors que le mathématicien et logicien Abraham ROBINSON a prouvé le contraire, en utilisant un *modèle non standard* du corps des réels, c'est à dire essentiellement distinct du modèle standard. Il a construit là-dessus une analyse, dite "non-standard" pour cette raison, qui dépasse de très loin la simple résurgence du calcul infinitésimal de LEIBNIZ. Par la suite, en 1977, E. NELSON a montré comment on pouvait fonder la pratique de cette analyse sur une extension formelle, nommée *Internal Set Theory*, en abrégé IST, de la théorie des ensembles ZF de ZERMELO-FRAENKEL avec axiome du choix.

Ce point de vue formaliste rend particulièrement clair le type de changement de contexte que nous pouvons introduire dans la mathématique pour résoudre notre problème didactique. Ce changement, qui est en fait un *renforcement sans aucune mutilation*, peut être construit en plusieurs étapes en fonction des besoins. Chacune est un affaiblissement d'IST, dont la pleine force n'est utile qu'au niveau des mathématiques avancées.

Les détails de cette construction se trouvent dans une récente brochure [LMM] que l'APMEP vient de publier. Nous y avons travaillé pendant près de trois ans afin de proposer des bases solides et minimales en vue de fonder une didactique nouvelle de l'Analyse au Lycée et dans le premier cycle universitaire. Elle est dédiée à la mémoire du bon maître Georges REEB et de notre ami Jean-Louis CALLOT, le brillant élève qui lui était si proche dans l'ordre de la curiosité d'esprit. Lorsqu'en 1973, G. REEB a proposé à R. LUTZ de se lancer dans l'aventure intellectuelle de l'ANS, dont il entrevoyait des applications fécondes dans divers domaines (des équations différentielles à l'algèbre en passant par les probabilités et la modélisation), il lui paraissait évident que cette nouvelle facette des mathématiques aurait un jour une incidence forte sur l'enseignement élémentaire de l'analyse.

L'objet du présent article est d'illustrer le charme de notre doctrine à travers quelques échantillons typiques de son application. La chose n'étant pas de nature commerciale, il importe peu que le sujet s'en trouve défloré, pourvu que l'entendement de nos pairs y trouve ses aises ...

Un petit avertissement au lecteur s'impose ici. Cet article n'est pas un résumé de la brochure [LMM]. Il aurait été difficile en quelques pages de résumer notre démarche, d'en montrer la solidité mathématique, les bases épistémologiques et philosophiques, les exploitations rigoureuses et riches, l'économie de pensée et la puissance inventive qui en résultent. Plus légèrement, nous vous invitons à en goûter l'esprit à travers une fiction didactique qui, peut-être, recueillera votre adhésion à l'idée d'une construction cohérente des concepts en jeu, et vous ouvrira des horizons nouveaux. Cette fiction a un autre objectif : celui d'esquisser une exploitation didactique complémentaire des fondements développés dans la brochure. Il s'agit d'un exemple de prolongement possible. Nous aimerions en susciter d'autres à partir du débat vif et passionné que la brochure ne pourra pas ne pas stimuler.

2. Fiction didactique

Voici la retranscription de quelques notes succinctes prises lors d'un cours d'analyse enseigné autour de l'an deux-mille dans une classe de Lycée, quelque part en France. Par bonheur l'élève qui a pris ces notes, bien que peu enclin à une rédaction soignée, a su dégager l'essentiel dans ces fragments de cours que nous avons retrouvés en assez mauvais état au fond d'une armoire.

Le premier fragment s'intitule

" Les ordres de grandeur numériques et leur analyse ".

"On introduit le concept primitif *d'entier modéré*. Il vérifie les quatre propriétés suivantes :

(i) L'entier 1 est modéré.

(ii) Tout entier naturel plus petit qu'un entier modéré est modéré.

(iii) Si x et y sont des entiers modérés, leur somme et leur produit le sont aussi.

(iv) Il existe des entiers non modérés, qu'on appelle *très grands*.

Extension aux nombres réels.

On dit qu'un réel est modéré si et seulement si la partie entière de sa valeur absolue est modérée.

On dit qu'un réel positif est *très grand* (en abrégé tg) si et seulement si la partie entière de sa valeur absolue est très grande.

Un nombre réel est dit *très petit* (en abrégé tp) si et seulement si il est nul ou bien son inverse est très grand en valeur absolue.

On écrit $x \approx y$ pour dire que x est très proche de y en ce sens que leur différence est très petite.

Propriétés de ces notions. Ici on invoque un certain LEIBNIZ en disant que c'est les mêmes qu'à l'époque. En bref :
tp + tp = tp ;
tp.modéré = tp ; etc... Il paraît que toutes ces propriétés découlent de (ii) et (iii).
On note $x << y$ pour dire que $x < y$ avec une différence non très petite.

Analyse approximative sur les réels.

C'est la recherche de la valeur d'une expression numérique à une erreur très petite près lorsqu'une certaine variable a un ordre de grandeur donné.

Exemple 0

Si $x >> 1$ alors $x.x >> x >> 1$ et si $x << 1$ alors $x.x << x << 1$. Donc si $x.x \approx 1$ alors $x \approx 1$. Réciproquement si $x \approx 1$ alors $x.x \approx 1$. Le même genre de propriétés marche pour x^3, x^4 etc... mais il paraît qu'il faut se méfier des "etc..." , vu que si n est très grand il paraît que l'on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$ (et non pas très proche de 1). On dirait que c'est vrai parce que sur la calculette pour $n = 5$ on trouve 2.48832 et pour $n = 10$, cela donne 2.5937425. Pour $n = 15$ ça augmente encore (2.6328787), et pour $n = 100$, on obtient 2.7048138.

Exemple 1

Que peut-on dire de $y = \dfrac{(1+x)^3 - 1}{x}$ lorsque x est très petit ?

Réponse : c'est très proche de 3 vu que $y = 3 + 3x + x^2$.

Exemple 2

Même chose pour $y = \dfrac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{\sqrt{1-2x} - 1 + x}$.

Réponse : l'astuce de la quantité conjuguée appliquée haut et bas donne $y = \dfrac{\sqrt{1-2x} + 1 - x}{\sqrt{1+2x} + 1 + x} \approx 1$. (utiliser l'exemple 0 et les propriétés des ordres de grandeur).

Exemple 3

Même chose pour $y = \dfrac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+4x} - 2 - 3x}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1-4x} - 2 + 3x}$. Pour ce monstre ça ne marche pas avec un truc du style quantité conjuguée. On commence alors par évaluer $z = \sqrt{1+u}$ pour u très petit en faisant sortir des puissances de u au moins jusqu'à la deuxième pour l'appliquer au numérateur et au dénominateur.

D'après l'exemple 0 on a $z = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \simeq 0$. D'où, si on met au carré, on trouve $2\varepsilon + \varepsilon^2 = u$ ou encore $\varepsilon = u\left(\dfrac{1}{2} + \eta\right)$ avec $\eta \simeq 0$. En remplaçant dans $2\varepsilon + \varepsilon^2 = u$, on trouve que $\eta = u\left(-\dfrac{1}{8} + \mu\right)$ avec $\mu \simeq 0$.

Donc finalement $z = \sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 + u^2\mu$.

Si on applique ceci à l'expression ci-dessus, on trouve facilement que $y \simeq 1$."

Le second fragment est plus abstrait. Il s'intitule :

"La notion de convergence apparente".

" Convergence apparente des suites.

Une suite réelle associe à chaque entier naturel n (éventuellement à partir d'un départ autre que 0) un nombre réel noté u_n. Etudier sa *convergence apparente* consiste à considérer les valeurs de la suite correspondant aux indices très grands. Plusieurs choses peuvent arriver. Par exemple :

- dans le cas de $u_n = \dfrac{1}{n}$ ces valeurs sont toutes très proches de 0.
- dans le cas de $u_n = n$ ces valeurs sont toutes très grandes mais pas très proches l'une de l'autre.
- dans le cas de $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ ces valeurs se groupent soit très près de 1, soit très près de -1.
- dans le cas de $u_n = \dfrac{1}{\varepsilon n}$ avec ε très petit fixé positif, ces valeurs sont "éparpillées" sur tout le demi-axe réel positif modéré.

Ces exemples suggèrent les définitions suivantes :

Définition 1. *Une suite apparaît convergente si et seulement si pour tout couple (p,q) d'indices très grands, les valeurs de la suite sont très proches l'une de l'autre.*

Dans ce cas, tout nombre réel très proche des valeurs de la suite correspondant aux indices très grands, est appelé une *limite apparente* de la suite. Si L est une limite apparente, alors, pour tout ε très petit, $L + \varepsilon$ est également une limite apparente.

Définition 2. *Une suite apparaît divergente vers l'infini si et seulement si ses valeurs correspondant à des indices très grands sont très grandes.*

Noter que la suite $u_n = \varepsilon n$ avec ε très petit positif n'apparaît pas divergente vers l'infini, puisque pour l'indice égal à la partie entière de $\frac{1}{\varepsilon}$ elle prend une valeur très proche de 1 alors que pour des indices beaucoup plus grands la valeur prise est très grande.

Théorème de Cauchy. *Soit u_n une suite qui prend une valeur modérée pour chaque indice modéré. Si la suite apparaît convergente, ses limites apparentes sont modérées.*

En effet, si L est une limite apparente, alors pour n très grand u_n est très proche de L. Supposons L très grand. Alors d'après l'hypothèse, pour n modéré u_n est inférieur à $L - 1$. Il en résulte que l'ensemble des entiers n tels que $u_n < L - 1$ contient tous les entiers modérés et aucun entier très grand. C'est un ensemble majoré d'entiers, donc il admet un plus grand élément m, nécessairement modéré. Alors il contient aussi $m + 1$, qui est modéré, ce qui contredit la définition de m. Ainsi L ne peut être très grand, pas plus que son opposé.

Convergence apparente des fonctions et continuité apparente.

Définition 3. *On dit qu'une fonction définie sur un intervalle $]a - h\ ,\ a + h[$ (avec h non tp) apparaît convergente vers une limite L lorsque x tend vers a si et seulement si l'image de tout point très proche de a, est très proche de L.*

On dit dans ce cas que L est une *limite apparente* de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

Définition 4. *On dit qu'une fonction* $f :\ ]a, \infty[\mapsto \mathbb{R}$ *avec a modéré apparaît divergente vers l'infini lorsque x tend vers l'infini si et seulement si elle prend une valeur très grande pour toute valeur très grande de x.* Définitions analogues dans les autres cas.

Définition 5. *On dit qu'une fonction définie sur un intervalle* $]a-h\ ,\ a+h[$ *(avec h non très petit) apparaît continue en a si et seulement si l'image de tout point très proche de a est très proche de* $f(a)$.

Une fonction apparaît continue sur un intervalle si et seulement si elle apparaît continue en chacun de ses points.

Exemples.

(i) Les fonctions polynôme de degré modéré dont tous les coefficients sont modérés apparaissent continues en tout point modéré.

(ii) La fonction $f(x) = ax$ avec a très grand n'apparaît continue en aucun point. Il en est de même de $f(x) = \sin(ax)$.

Théorème. *Soit* $f : [a\ ,\ b] \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction qui apparaît continue sur* $[a\ ;\ b]$. *On suppose* $f(a) < 0$ *et* $f(b) > 0$. *Alors il existe un point intermédiaire* $c \in [a\ ,\ b]$ *tel que* $f(c) = 0$.

En effet, si on subdivise l'intervalle par un nombre très grand de points consécutifs tels que $x_{i+1} = x_i$ il existe un plus grand indice, noté k tel que $f(x_k) < 0$. La continuité apparente implique que $f(x_k) \approx f(x_{k+1}) \geqslant 0$. Il en résulte que $f(x_k) \approx 0$.

Théorème. *Soit* $f : [a\ ,\ b] \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction qui apparaît continue en chaque point. Alors il existe* $c \in [a\ ,\ b]$ *tel que* $f(c)$ *apparaît comme un majorant de la fonction sur tout l'intervalle.*
Cela signifie que pour tout x de $[a\ ,\ b]$, $f(x)$ dépasse $f(c)$ au plus d'une valeur très petite.
La démonstration utilise à nouveau une subdivision de l'intervalle. Elle est à peu près évidente."

Le troisième fragment concerne

"Les fonctions qui apparaissent lisses".

Il est très abîmé, mais on peut facilement imaginer de quoi il s'agit : une fonction apparaît lisse en un point si le rapport d'accroissement correspondant à un accroissement très petit de la variable est modéré et ne dépend que très peu de cet accroissement.

Un dernier fragment, encore plus abîmé, concerne "les fonctions qui apparaissent intégrables", en ce sens que les sommes de RIEMANN correspondant à diverses subdivisions fines de l'intervalle de définition ont des valeurs très proches. Apparemment les fonctions qui apparaissent continues sur un segment de longueur modérée apparaissent intégrables.

3 . Commentaire

Dans cette mathématique sympathique, proche de l'intuition et simple, que le lecteur complétera aisément, il est question de nombres réels *très petits, très grands*, de suites et de fonctions *qui apparaissent convergentes*, de fonctions *qui apparaissent continues*. Le tout est assis sur la notion primitive de *nombre entier modéré*, à laquelle on attribue des propriétés qui sont directement inspirées de l'idée intuitive qu'il y a des entiers que nous pouvons imaginer, les "autres" étant inimaginables ... Sans pour autant que ce concept flou, précieux pour rapprocher les mathématiques de la vie courante où abondent les considérations à base d'ordres de grandeur absolus, ne corresponde à une coupure précise dans l'ensemble des entiers.

Comment peut-on justifier l'introduction d'un tel concept dans le cadre mathématique ?

La grande nouveauté (par rapport aux tentatives post-leibnizienne pour *définir* les infinitésimaux) est que l'on ne définit pas la notion d'entier modéré dans le cadre de ZF, comme on définit par exemple la notion d'entier pair. Mais on enrichit seulement le langage du vocable "entier modéré" (comme dans le cas d'une définition), et on enrichit la théorie en introduisant des axiomes supplémentaires qui sont suggérés par la mathématique informelle (dans le cas d'une définition l'axiome supplémentaire correspond à un théorème d'existence et d'unicité).

Dans la théorie plus riche ZF+ ainsi décrite, tous les éléments d'analyse présentés dans l'extrait ci-dessus sont des théorèmes.

Ainsi, en nous plaçant dans cette modeste extension du cadre mathématique classique, nous avons déjà effectué un grand pas dans la résolution de notre problème didactique, tout en renouant les fils brisés de l'histoire. En effet c'est par un caprice étonnant de l'histoire des mathématiques, qui s'explique a posteriori si l'on regarde de l'extérieur le chemin hésitant que prend l'invention, que de telles notions naturelles et merveilleusement fécondes ont été si longues à être clarifiées, après avoir pratiquement disparu du discours pendant plus d'un siècle.

Cependant, on peut ne pas accepter cette extension, pour diverses raisons.

- *Sentimentales* : "j'aime la mathématique telle qu'elle est, si belle, si logique, si délicieusement compliquée ; je ne veux rien changer".
- *Dogmatiques* : "on n'a pas le droit de changer le contexte ; ce serait trahir nos pères et ouvrir la porte à toutes les hérésies".
- *Scientifiques* : "ne risque-t-on pas d'introduire une contradiction dans la mathématique ? J'en vois une, évidente, énorme, rédhibitoire. Si j'ajoute 1

à un entier modéré, j'obtiens encore un entier modéré. Donc par récurrence, tous les entiers sont modérés. Une autre contradiction évidente : l'ensemble des entiers modérés serait majoré par n'importe quel entier non modéré, donc aurait un dernier élément. Si je lui ajoute 1, j'obtiens un modéré qui lui est supérieur ..."

- *Carrément savant* : " les contradictions relevées par notre éminent collègue ne me semblent pas sérieuses. En fait, la récurrence ne doit pas être appliquée à n'importe quelle propriété, mais seulement à celles qui s'expriment dans le langage classique, ce qui n'est pas le cas du concept d'entier modéré. De même rien ne permet d'affirmer que les entiers modérés constituent un sous-ensemble de l'ensemble des entiers naturels. Pour constituer un tel sous ensemble, il faut sélectionner les éléments par une propriété du langage classique. A contrario, cela montre qu'il n'y a pas d'ensemble des entiers modérés. Cependant, j'ai quand même un doute sérieux : en admettant que le contexte étendu n'amène pas de contradiction qui ne serait pas déjà présente dans le contexte classique, est-on certain que le contexte étendu ne modifie pas l'ancienne mathématique ? Je veux dire par là qu'un énoncé du langage classique pourrait être un théorème dans le contexte étendu sans que l'on puisse le démontrer dans l'ancien contexte. En d'autres termes, votre extension est-elle conservative ? "

La réponse est **oui** ! La théorie ZF+ n'est en effet qu'un pâle sous-produit de la théorie IST, laquelle a été prouvée conservative. Donc, du côté logique, les choses sont aussi parfaitement fondées que l'est ZF elle-même. Si l'on accepte celle-ci comme base de la pratique mathématique, aucun argument de logique ne s'oppose à accepter IST , donc ausi et seulement si ZF+.

Du point de vue didactique, les extraits ci-dessus mettent en évidence le bénéfice considérable que l'on peut attendre du contexte étendu où l'analyse s'exprime en termes d'ordre de grandeur. Le contenu scientifique de la notion de limite (au sens de son applicabilité à la modélisation des phénomènes) devient accessible à un élève capable de raisonner dans le sens direct, à la manière d'un calcul par étapes successives, mais incapable de produire un raisonnement d'analyse classique où il faut "voir" globalement le chemin gagnant en remontant de la conclusion vers les hypothèses dans un graphe logique où à chaque sommet il y a divers choix possibles dont la plupart mènent à une impasse ...

Le contexte ainsi étendu (avec quelques renforcements présentés dans la brochure [LMM] impliquant par exemple l'extension à x^y de l'axiome (iii)) permet donc d'aborder avec des outils nouveaux (de nature *scientifique* et non *pédagogique*) l'un des problèmes majeurs de la didactique des mathématiques confrontée à l'extension relativement massive des études secondaires dans la jeunesse. En effet, si l'on ne veut pas réduire l'apprentissage des mathématiques à celle de calculs algébriques, mais aussi introduire un calcul de limites de suites et fonctions, assorti de véritables raisonnements d'analyse, il faut rendre cette analyse plus "algébrique". Les artifices d'inspiration pédagogique introduits dans la dernière décennie ne font qu'aggraver la difficulté en coupant davantage les notions formelles des idées intuitives, ce qui éloigne également les élèves les plus doués de la vraie nature des mathématiques : raisonner sur des concepts abstraits clairement délimités et issus du contexte scientifique, selon une logique explicitement précisée. Au contraire, l'extension du contexte mathématique que nous proposons, irréprochable du point de vue logique et riche de contenu scientifique, algébrise une part substantielle de l'analyse des limites (bien au-delà de la matière que les programmes passés et présents ont osé introduire au Lycée).

> Dans la première partie de la brochure, nous insistons fortement sur l'analyse des ordres de grandeur sur des expressions numériques sans introduire comme ci-dessus les notions fonctionnelles de convergence apparente. Celles-ci ne sont en fait qu'un simple habillage en termes de fonctions de constats sur des expressions numériques. Nous avons voulu montrer ici qu'en fait on pouvait aller assez loin en termes d'ordres de grandeur, en démontrant des théorèmes profonds qui contiennent déjà l'essentiel des théorèmes correspondants de l'analyse classique. Mais dans un premier temps une étude très soignée de nombreuses expressions numériques nous paraît beaucoup plus importante que l'introduction d'un vocabulaire intermédiaire, préalable aux notions classiques de limite.

4 . Le second niveau d'extension

Il reste à mettre en évidence l'articulation entre l'analyse en termes d'ordres de grandeur, et l'analyse en termes de limites définies en termes classiques. Pour cela un second niveau d'extension est nécessaire, nettement plus sophistiqué. Insistons sur le fait que, alors que la première extension est suffisante pour quiconque a besoin d'une notion de limite pour modéliser un phénomène pratique, la seconde est presque exclusivement liée aux besoins des mathématiques. Elle ne devrait donc être introduite que dans le cadre d'études à connotation mathématique forte, les autres besoins pouvant être couverts par le recours aux ordres de grandeur.

L'idée de base est d'ériger en axiomes les propriétés informelles de la notion *d'objet mathématique défini de manière unique* .

On introduit à cette fin le qualificatif nouveau *bien déterminé* (en abrégé *bd*) et à son sujet les trois schémas d'axiome (c'est à dire des axiomes où apparaît une propriété arbitraire) de *transfert, d'idéalisation* et de *détermination*. Ceci décrit la théorie appelée ZFE dans notre ouvrage.

Une conséquence immédiate en est que la notion d'*entier bd* vérifie les axiomes concernant la notion *d'entier modéré*. C'est pourquoi dans le dernier contexte, on peut définir les ordres de grandeur en définissant "entier modéré" par "entier bd", ce qui fait de ZFE une extension de ZF+. Notons cependant que les réels modérés ne sont pas tous bd, car un réel positif très petit ne peut être bd, sinon il serait plus petit que sa moitié. Dans ce contexte les entiers très grands sont ceux qui ne sont pas bd. Ainsi cette théorie formalise en particulier l'idée contenue dans l'expression ancienne "entier indéfiniment grand" que l'on trouve chez certains auteurs, mais qui ne s'étend pas aux réels.

La théorie ZFE est elle ausi et seulement si un affaiblissement de la théorie IST. Elle est donc une extension conservative de ZF, ce qui, du point de vue logique, en justifie l'usage comme référence de la pratique mathématique aussi bien que celle de ZF.

Nous renvoyons à la brochure le lecteur intéressé. Disons seulement que dans ZFE la complétude du corps des réels s'exprime dans le fait que tout réel modéré est très proche d'un unique réel bd, que nous appelons son *ombre* .

Grâce au transfert, on montre qu'une suite bd attribue une valeur bd à tout indice bd. Il en résulte (voir le théorème dit ci-dessus "de Cauchy") que si la suite apparaît convergente, ses valeurs pour les indices très grands sont toutes très proches de leur ombre commune que l'on appelle *limite* de la suite. On montre ensuite en utilisant le transfert et l'idéalisation que cette limite vérifie la définition classique de la limite en termes d'epsilon-delta, laquelle s'applique à toutes les suites, bd ou pas.

Mais en fait, grâce au transfert, pour démontrer un théorème général sur les suites, il suffit de le démontrer pour les suites bd. Pour celles-ci, on peut, si on le désire, utiliser la caractérisation de la convergence en termes d'ordres de grandeur, ce qui rend souvent la démonstration plus directe, et pour cela plus facile à "inventer".

Pour terminer cette brève présentation, voici quelques éléments d'analyse concernant les fonctions continues. Elles donnent le ton du type de raisonnement que l'on peut faire.

En utilisant le transfert et l'idéalisation on montre que, pour qu'une fonction bien déterminée f définie sur un intervalle bien déterminé $]c-h\ ,\ c+h[$ soit continue en un point bien déterminé c il faut et il suffit que, pour x très proche de c, $f(x)$ soit très proche de $f(c)$.

Proposition : *si f est continue en c et g en $f(c)$ alors la composée $g \circ f$ est continue en c.*

Démonstration. Par transfert il suffit de démontrer l'affirmation pour f, g, c bien déterminés.

La caractérisation ci-dessus de la continuité s'applique alors : pour tout x très proche de c on a $f(x)$ très proche de $f(c)$ et donc $g(f(x))$ très près de $g(f(c))$, ce qui montre la continuité de la composée.

Théorème des valeurs intermédiaires : *Pour toute fonction continue f définie sur un intervalle $[a,b]$ et telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, il existe un réel c dans l'intervalle $[a,b]$ tel que $f(c)=0$.*

Par transfert, on peut sans restreindre la généralité, supposer f, a et b, (c'est-à-dire les constantes de l'énoncé), bien déterminés. Un partage en un nombre très grand n d'intervalles égaux fournit un dernier point de partage x_i tel que $f(x_i) < 0$. Donc $f(x_{x+1}) \geqslant 0$ et $x_{x+1} \simeq x_i$. L'ombre commune $c = {}^{\circ}x_i = {}^{\circ}x_{i+1}$ vérifie $f(c) \simeq 0$ en raison de la continuité de f en c. Mais $f(c)$ est bd, donc nul car un nombre réel bd et très proche de 0 aurait un écart à 0 plus petit que tout réel bd, donc que lui-même (en valeur absolue).

Théorème : *Toute fonction continue f définie sur un intervalle $[a,b]$ admet un maximum dans cet intervalle.*

Par transfert, on peut se restreindre au cas d'une fonction bd sur un intervalle bd. Partageons l'intervalle par un nombre fini et très grand de points x_i tels que $x_{i+1} \simeq x_i$. L'ensemble fini des $f(x_i)$ admet un maximum $f(x_k)$. Or tout élément x de $[a,b]$ est contenu dans l'un des intervalles $[x_i\,;\,x_{i+1}]$. On a alors $f(x) \simeq f(x_i) \leqslant f(x_k) \simeq f({}^{\circ}x_k) = M$. Si x est bd on a donc $f(x) \leqslant M$. Par transfert cela suffit pour que f soit majorée par la valeur M qui est atteinte en ${}^{\circ}x_k$.

5 . Avertissement

Notre brochure semble relativement agréable à lire mais exige du lecteur un effort important de clarification en ce qui concerne la conception des mathématiques qu'il pratique. On ne peut pas bâtir sur des idées fausses, bien que l'on puisse vivre avec elles tant que leurs défauts ne portent pas à conséquences. En fait la difficulté de l'approche en termes d'ordres de grandeur ne provient pas de la nouveauté des concepts, ni de leur maniement, mais des erreurs d'interprétation que l'on peut commettre si l'on n'a pas bien compris la mathématique *classique*. L'une des erreurs les plus criantes concerne la récurrence, que l'on confond souvent avec l'idée intuitive de "monter l'escalier marche après marche".

Pour terminer, une ultime précision : notre brochure n'est pas un livre sur la *pédagogie* des mathématiques, mais sur leur *contenu*. Elle fournit la base d'une didactique nouvelle, servie par une pédagogie qui reste à mettre au point par les professeurs de mathématiques lorsque, un jour que nous espérons proche, une prise de conscience suffisante aura conduit à une modification adéquate des programmes. Pour le moment il importe de réfléchir ensemble, de discuter notre proposition, d'imaginer le renouvellement pédagogique qu'elle implique et d'en expérimenter les effets de manière scientifiquement cohérente, ce qui devrait éviter les dérapages dus à un enthousiasme mal maîtrisé. Nous sommes évidemment ouverts à toutes les suggestions dans ce sens.

Références :

[LMM] R. Lutz, A.Makhlouf, E.Meyer, Brochure APMEP n° 103.
(Fondements pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordre de grandeur : les réels dévoilés)

[LMM'] R. Lutz, A.Makhlouf, E.Meyer, Repères-IREM n° 24.
(L'enseignement de l'analyse en termes d'ordre de grandeur)