Avis de recherche

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.
Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet et votre nom sur chacune, et, si possible, une disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour immédiat) à :

Robert FERRÉOL
6, rue des annelets
75019 PARIS
ou à l'adresse internet du lycée d'Enghien :
cabout@sancerre.ac-idf.jussieu.fr

Je constate une augmentation du nombre de questions envoyées, mais une stagnation des réponses. Je n'ai par exemple reçu aucune réponse à plusieurs avis du n°408.

NOUVEAUX AVIS DE RECHERCHE

Avis de recherche n°72 de Laurent PECQUEUX (Le Cateau).
Quelle est la véritable raison de la non existence d'un prix Nobel de Mathématiques ?

Voici en guise de réponse directe un texte de Bernard Hauchecorne et Daniel Surateau, tiré de leur (remarquable) livre : *Des mathématiciens de A à Z* (Ellipses).

«Gösta Mittag-Leffler et Alfred Nobel courtisent la même femme, et le cœur de celle-ci penche pour le mathématicien. C'est pourquoi Nobel, craignant que son ancien rival soit récompensé, refuse l'institution d'un prix Nobel de mathématiques. Notons que, contrairement à une croyance répandue, Alfred Nobel est resté célibataire».

Avis de recherche n°73 de Laurent PECQUEUX.
Que peut-on dire de la série de terme général sin(n!) ?

Avis de recherche n°74 de Laurent PECQUEUX.
Lorsqu'en 1889, PEANO publie ses axiomes, zéro en est exclus. A partir de quand zéro fut-il admis à vivre dans $\mathbb{N}$?

Avis de recherche n°75 de Loël PAYEN (Blanc-Mesnil)

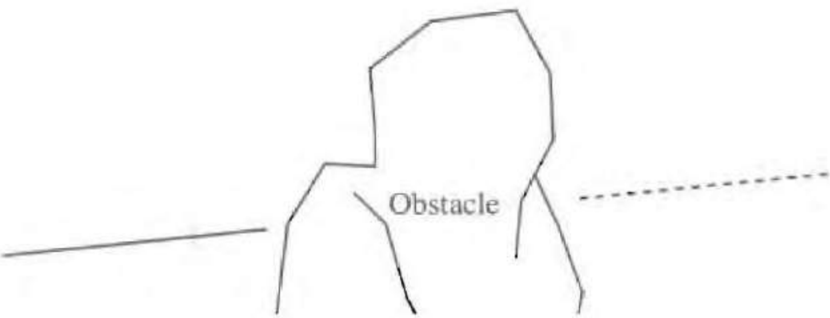
Un amis travaillant dans la finance souhaiterait avoir une justification de la formule d'approximation :

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots\right)$$

avec $t = \frac{1}{1+px}$, $p = 0{,}231\ldots$, $b_1 = 0{,}319\ldots$, $b_2 = -0{,}356\ldots$

Avis de recherche n° 76 de Éric KERMOVANT (collège de Gargenville)

On aimerait prolonger une droite de l'autre côté d'un obstacle infranchissable mais contournable, à l'aide d'une règle non graduée. J'ai utilisé une construction utilisant 14 droites intermédiaires. Peut-on faire mieux ?



Avis de recherche n°77 de Marc BLANCHARD (Rochefort sur mer).

Recherche une démonstration de géométrie pure du résultat suivant concernant le triangle, qu'il a découvert à l'aide des coordonnées barycentriques : dans un triangle, le point de Gergonne (point de concours des céviennes des points de contact du cercle inscrit avec les côtés), le point de Nagel (point de concours des céviennes des points de contact des cercles exinscrits avec les côtés), l'isotomique du centre du cercle inscrit et l'isotomique de l'orthocentre sont alignés et forment dans c et ordre une division harmonique (l'isotomique d'un point de coordonnées barycentriques (α, β, γ) étant le point de coordonnées ($1/\alpha$, $1/\beta$, $1/\gamma$), à ne pas confondre avec l'isogonal).

Avis de recherche n° 78 de Michèle Iombardo (1, chemin de Bibémus, 13100 Aix-en-Provence).

Recherche pour achat ; aide mémoire de mathématiques générales par Maurice Denis-Papin (Dunod 1947 ou 1951).

Réponses aux avis précédents

Avis de recherche n°63

Développement asymptotique de (S_n^n) et (S_{n-1}^n) où $S_m^n = e^{-n}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{n^k}{k!}$.

Jean-Louis Nicolas (institut Girard Desargues, Lyon 1, jlnicolas @ frcpnll.in2p3.fr) rattache ce développement à celui de $\Gamma(n+1, n) = \int_n^{\infty} e^{-t}t^n\,dt$, tiré de Abramovitz et Stegum, Handbook of mathematical functions, p. 263 :

$$\Gamma(n+1, n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{n} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2\pi}}{24}\frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

En effet, par intégration par parties : $S_n^n = \int_n^{\infty} e^{-t}t^n\,dt$. et en utilisant le développement de Stirling :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51\,840n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right),$$

il obtient : $S_n^n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\left(\frac{1}{3} - \frac{23}{540n} + \frac{23}{6\,048n^2} + \frac{259}{15\,520n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$.

Le développement de S_{n-1}^n se déduit de celui de (S_n^n) par la relation :

$$S_{n-1}^n = S_n^n + \frac{n^n e^{-n}}{n!}\frac{n}{n+1}.$$

Avis de recherche n°69

Lorsque je joue au pendu, je propose des mots assez longs donc assez difficiles à trouver, pensant augmenter les chances de pendre mon adversaire. Or, ma fille propose au contraire des mots très courts, «puisqu'il y a alors plus de chances que l'adversaire dise des lettres n'intervenant pas dans le mot»...

Qui a raison ?

Réponse de Jean MOREAU DE SAINT MARTIN.

Mon sentiment est que Mélodie est plus fine stratège que son père! La raison serait à chercher de côté de la théorie de l'information.

Avec un alphabet de 26 lettres, on peut coder 17 576 éléments (soit un vocabulaire déjà assez développé) en "mots" de trois lettres. Des "mots" de quatre lettres permettraient de coder tout le dictionnaire, avec les féminins, les pluriels et les conjugaisons.

Il en ressort que les mots français de 6 ou 7 lettres, par exemple, sont bien moins nombreux que l'alphabet ne le permettrait. Quant aux mots très longs, on connaît *anticonstitutionnellement* pour être le mot le plus long du dictionnaire, et on peut donc le trouver avec très peu d'essais infructueux (ceux qui menacent de pendaison). Le savant Cosinus avait fait encore plus long avec son invention,

l'anemélectroreculpédalicoupeventombrosoparacloucycle,

combinant toutes les forces propulsives "connues et même inconnues".

En d'autres termes, la quantité d'information d'un mot français augmente bien moins que proportionnellement à sa longueur. De plus, dès qu'on connaît la moitié des lettres d'un mot français qui en a 6 ou 7, le choix pour celles qui restent à trouver se restreint beaucoup, peut-être plus que pour un mot court dont on ignore tout.

S'il faut trouver "qat", par exemple, on va trouver le *a* avec peu d'essais, mais le reste ? Il y a sans doute (je n'ai pas fait le compte) des dizaines de mots de la forme —a—, de bac à yak.

Le choix des lettres à essayer, au cours du jeu du pendu, pourrait aussi être guidé par la théorie de l'information : en fonction des lettres déjà essayées, de leur succès ou non, chaque lettre essayable peut apporter une certaine quantité d'information, à mettre en balance avec le risque d'ajouter aux essais infructueux.

Avis de recherche n°70

Dans "*Astérix chez les Bretons*" (p. 46), les romaines légions se mettent en carré, puis en triangle, et enfin en disque. Combien y a-t-il de légionnaires ?

Réponse de Jean Moreau de Saint Martin.

La mise en équation se heurte à la question préalable de définir mathématiquement la disposition "en disque", qui n'est pas classique en géométrie des nombres.

La formation en carré ne donne pas lieu à ambiguïté, la formation en triangle guère plus, encore que…regardons le schéma :

aaaaccc
baaacc
bbaac
bbba

10 légionnaires **a** et 6 légionnaires **b** forment un carré ; quand les légionnaires **b** se déplacent en **c**, ils forment avec les légionnaires **a** un triangle, et cela vaut pour n'importe que carré !

Mais ce triangle a 7 légionnaires sur un côté et 4 seulement sur les autres. Par convention, on se limite pour définir les nombres triangulaires aux triangles ayant le même nombre de légionnaires sur les trois côtés. Chacun des groupes de légionnaires **a**, **b** et **c** répond à cette définition.

Si n est un nombre triangulaire, $8n + 1$ est carré, selon le schéma :

aaabccc
aadbbcc
addbbbc
dddieee
fggghee
ffgghhe
fffghhh

où chacun des ensembles **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **g**, **h** a n éléments.

Si n est à la fois carré et triangulaire, on a l'équation de Fermat $x^2 = 8n^2 + 1$, dont toutes les solutions en entiers positifs sont données par $x = T_k(3)$ (racine de $8n + 1$), $y = U_k(3)$ (racine de n), T_k et U_k désignant les polynômes de Tchebychev et les polynômes associés.

Ainsi, les premières valeurs de n sont : 1, 36, 1225, 41616, 1413721,…

Que peut être une disposition en disque ?

Je représente l'espace occupé par un légionnaire par un disque de rayon unité. Autour du premier légionnaire, je peux en placer 6 autres, dans une couronne de rayons intérieur 1 et extérieur 3. Puis 12 en deuxième couronne, 18 en troisième couronne…

Si je poursuis ainsi jusqu'à $6m$, en $m^{\text{ème}}$ couronne, il y aura $n = 1 + 3m(m + 1)$ légionnaires dans le disque. $12n - 3$ est alors le carré de $6m + 3$. Est-ce possible quand n est le carré de $U_k(3)$? Il ne me semble pas pour $n > 1$, mais je n'ai pas su le démontrer.

Une formulation équivalente est que $3T_k(17) - 15$ soit un carré. C'est un problème analogue à l'avis de recherche n°2 de Quadrature (montrer que le seul n tel que $3n + 1$, $4n + 1$ et $6n + 1$ soient des carrés est $n = 0$).

Cependant, dès que $m > 1$, les disques d'encombrement des légionnaires de la $m^{\text{ème}}$ couronne ne touchent pas tous leurs deux voisins dans cette couronne. Si m est assez grand, on peut mettre plus de $6m$ légionnaires en $m^{\text{ème}}$ couronne. Une borne supérieure est $2\pi m$, une borne plus précise étant $E(\pi/\text{Arcsin}(1/2m))$, E notant la partie entière.

Cela donne une marge d'interprétation, mais il ne semble pas qu'on puisse en tirer une solution avec un nombre plausible de légionnaires !