Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Il n'y a pas, dans ce numéro de vacances, de rubrique "Problèmes", mais seulement quelques jolis énoncés à emporter à la plage : ceux du "Concours Général 1997".

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe de Terminale S)

Durée : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice I

On a placé un jeton sur chaque sommet d'un polygone régulier à 1997 côtés. Sur chacun de ces jetons est inscrit un entier relatif, la somme de ces entiers étant égale à 1. On choisit un sommet de départ et on parcourt le polygone dans le sens trigonométrique en ramassant les jetons au fur et à mesure tant que la somme des entiers inscrits sur les jetons ramassés est strictement positive.

Peut-on choisir le sommet de départ de façon à ramasser tous les jetons ? Si oui, combien y a-t-il de choix possibles ?

Exercice II

Une capsule spatiale a la forme du solide de révolution délimité par une sphère de centre O, de rayon R, et un cône de sommet O qui rencontre cette sphère selon un cercle de rayon r.

Quel est le volume maximal d'un cylindre droit contenu dans cette capsule, le cylindre et la capsule ayant le même axe de révolution ?

Exercice III

C est un cube d'arête 1 et *p* est la projection orthogonale sur un plan. Quelle est la valeur maximale de l'aire de *p(C)* ?

Exercice IV

Etant donné un triangle *ABC*, on note *a*, *b*, *c* les longueurs de ses côtés et *m*, *n*, *p* les longueurs de ses médianes. Pour tout réel α strictement positif, on définit le réel $\lambda(\alpha)$ par la relation : $a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha = (\lambda(\alpha))^\alpha\,(m^\alpha + n^\alpha + p^\alpha)$.

1°) Calculer $\lambda(2)$.

2°) Calculer la limite de $\lambda(\alpha)$ lorsque α tend vers zéro.

3°) A quelle condition portant sur *a*, *b*, *c* le réel $\lambda(\alpha)$ est-il indépendant de α ?

Exercice V

Dans le plan, soient *A* et *B* deux points distincts. Pour tout point *C* extérieur à la droite *(AB)*, on note *G* l'isobarycentre du triangle *ABC* et *I* le centre de son cercle inscrit.

1°) Soit α un réel tel que $0 < \alpha < \pi$. Quel est l'ensemble Γ des points *C* tels que $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \alpha + 2k\pi$, *k* étant un entier ? Lorsque *C* décrit Γ, montrer que *G* et *I* décrivent deux arcs de cercle que l'on précisera.

2°) On suppose désormais $\pi/3 < \alpha < \pi$. Comment choisir *C* dans Γ pour que la distance *GI* soit minimale ?

3°) On note $f(\alpha)$ la distance minimale *GI* de la question précédente. Expliciter $f(\alpha)$ en fonction de $a = AB$ et α. Déterminer la valeur maximale de $f(\alpha)$ lorsque α décrit $]\pi/3, \pi[$.