Topologie et manipulation directe dans les logiciels de construction

SergeHOCQUENGHEM (CREEF, CNAM Paris)

Dans les logiciels de construction permettant de manipuler des objets géométriques, le cas des droites pose un problème différent de celui des points. En effet, la possibilité d'action directe sur une droite à l'aide de la souris fait interveniria topologie de la variété des droites de $\mathbb{R}^2$ qu'on peut décrire de manière simple et imagée.

Introduction

Dans un logiciel de construction géométrique mathématique comme GEOPLAN ou de construction géométrique comme CABRI-GEOMETRE ou d'autres, les éléments mobiles des figures (points, droites, cercles, éventuellement scalaires etc..) peuvent être assimilés à des variables prenant leurs valeurs respectivement dans l'ensemble des points du plan, dans celui des droites ou celui des cercles du plan, dans l'ensemble des réels etc. Parmi ces éléments mobiles, on trouve les points libres dans le plan, qui sont des variables «indépendantes». Ces points libres peuvent être «pilotés» ou «manipulés»[1] de manière naturelle et simple au clavier ou à la souris.

1 Certains distinguent le «pilotage» par l'intermédiaire du clavier ou d'autre codage de la «manipulation directe» qui se fait à la souris.

Pourquoi «de manière naturelle et simple» ? Parce que le pilotage ou la manipulation d'un point libre respecte des critères intuitifs de bijectivité et de continuité entre les actions physiques de l'acteur et la position du point.

Lors de la réalisation de GEOPLAN, l'équipe responsable s'est posé la question de la manipulation (à la souris) des droites, des cercles etc.... Comme un cercle du plan dépend de trois paramètres numériques indépendants, la question de la bijection simple et naturelle entre l'ensemble des cercles et celles des positions du curseur de la souris est vite réglée : il faut y renoncer.

Le problème est moins clair pour ce qui est d'une droite qu'on peut effectivement caractériser à l'aide de deux paramètres numériques, tout comme on peut le faire pour la position du curseur de la souris. Cependant si on y regarde de plus près, on a des ennuis en essayant de créer une bijection «respectant les proximités» (c'est à dire un homéomorphisme, une fois les topologies précisées) entre une région du plan affine (qu'on pouvait assimiler à l'ensemble des positions du curseur de la souris) et l'ensemble des droites du plan affine. En effet, si on impose la bijectivité, on se heurte à des problèmes de continuité qui font que deux droites «voisines» peuvent correspondre à deux positions «éloignées» de la souris et, de même si on impose la continuité, on se heurte à des problèmes de bijectivité (comme c'est la cas avec la description d'une droite de $\mathbb{R}^2$ par sa pente et son ordonnée à l'origine qui respecte bien la proximité intuitive des droites, mais oublie les droites verticales).

Ces difficultés ont une origine mathématique qui est dans la nature topologique «naturelle» de l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$ et dont la description fait l'objet des paragraphes suivants.

Dans ce texte, on suppose le plan affine muni d'un repère fixe. On peut donc assimiler ce plan repéré à $\mathbb{R}^2$.

Variété de toutes les droites de $\mathbb{R}^2$

Considérons la figure constituée d'une variable réelle u dans $[0, \pi[$, d'une variable réelle v et de la droite D d'équation $\cos(u)X + \sin(u)Y = v$. Quand u et v prennent toutes les valeurs possibles, la droite variable D décrit l'ensemble de toutes les droites fixes de $\mathbb{R}^2$. L'application qui fait correspondre au couple (u, v) la droite$D$ est une bijection de l'ensemble $[0, \pi[\times \mathbb{R}$ vers l'ensemble de toutes les droites de $\mathbb{R}^2$.

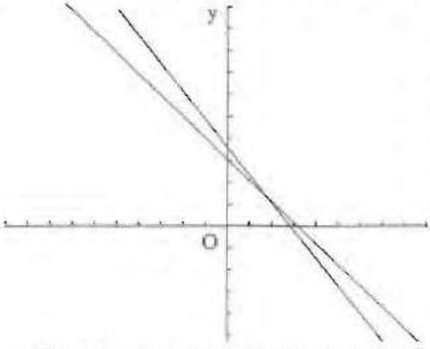
En effet, pour chaque droite d'équation $aX + bY + c = 0$, quitte à changer tous les signes, on peut supposer $b \geqslant 0$ et on peut aussi attribuer à cette droite l'équation

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}X+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}Y=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

et il existe un unique nombre u dans $[0, \pi[$ tel que

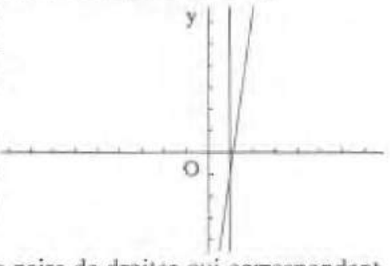
$$\cos(u)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin(u)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Plus géométriquement, cette bijection est simplement basée sur le fait que chaque droite de $\mathbb{R}^2$ admet un vecteur unitaire normal qui fait un angle avec le vecteur unitaire de l'axe des abscisses ayant une mesure u dans $[0, \pi[$. Le nombre v est alors l'abscisse, avec ce vecteur normal comme unité, du pied de la perpendiculaire issue de l'origine à la droite.



Sans entrer dans les détails, nous admettrons que l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$ peut être muni d'une topologie naturelle. Cette topologie rend voisines deux droites telles que les projections orthogonales de l'origine sur ces droites soient voisines et dont les directions sont voisines[2] (c'est-à-dire que l'angle de droites admet une mesure proche de 0).

Si a est un nombre de $[0, \pi[$ et proche de π alors la droite d'équation $\cos(a)X + \sin(a)Y = -1$ et la droite d'équation $X = 1$ sont voisines au sens précédent.



Cependant, les deux couples (u, v) correspondant à ces deux droites dans la bijection précédente sont $(a, -1)$ et $(0, 1)$ qui ne sont pas proches dans $\mathbb{R}^2$.

Ce phénomène se produit pour chaque paire de droites qui correspondent à deux couples de nombres (u, v) et (u', v') de $[0, \pi[\times \mathbb{R}$ tels que u est proche de 0 alors que u' est proche de x tandis que $v + v'$est proche de 0. Avec la métrique de $\mathbb{R}^2$, ces deux couples sont séparés par une distance d'environ π ou plus.

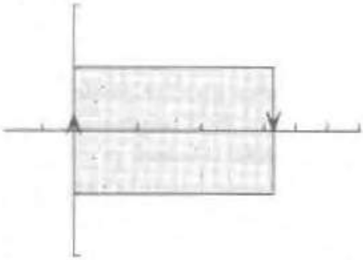
2 Les deux conditions sont nécessaires car deux droites dont la distance à l'origine est petite peuvent être par exemple perpendiculaires, donc ne pas être «proches». Inversement, deux droites parallèles peuvent être à une grande distance l'une de l'autre.

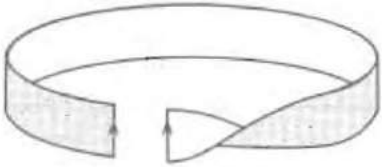
Pour rendre compte de la notion de proximité dans l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$, il faut donc «rendre proche» les couples du type précédent. Cela revient, pour la bande $[0, \pi[\times \mathbb{R}$ à «recoller» la droite verticale d'abscisse π avec celle d'abscisse 0, mais en identifiant les points $(0, v)$ et $(\pi, -v)$, c'est-à-dire en faisant un retournement avant de recoller. La structure obtenue est ce qu'on appelle une surface de Moebius.

Les droites rencontrant le cercle trigonométrique

En adaptant l'exemple 1, on peut représenter une telle droite par l'équation $\cos(u)X + \sin(u)Y = v$ où u varie encore dans $[0, \pi[$, mais où v varie ici dans $[-1, +1]$.

La variété ainsi définie peut être obtenue en recollant $\{0\} \times [-1, 1]$ et $\{\pi\} \times [-1, 1]$, mais cette fois avec un retournement : c'est une bande de Moebius[3] .

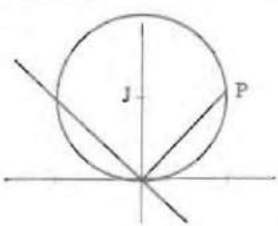




Les droites passant par l'origine

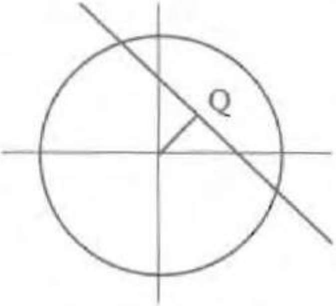
C'est encore une sous-variété de la surface de Moebius de l'exemple 1 : il suffit de prendre $v = 0$ dans l'équation générale, La droite en question est donc la perpendiculaire en O au vecteur unitaire $(\cos(u), \sin(u))$, où u varie dans $[0, \pi[$. Pour rendre compte de la topologie de l'exemple 1, on doit recoller $\{0\}$ avec $\{\pi\}$: on obtient donc topologiquement un cercle.

Une telle droite peut être vue comme la perpendiculaire en O à la droite OP, où P décrit le cercle de centre (0, 1) et de rayon 1 (quand P vient en O, il faut prolonger par continuité l'existence de la droite OP en prenant sa limite, c'est-à-dire la tangente en O au cercle qui donne la droite $x = 0$ par perpendicularité).



3 On sait bien que, contrairement à l'exemple 1, la variété obtenue (avec les bords) est compacte et donc immersible dans $\mathbb{R}^3$. C'est pourquoi nous avions utilisé le terme de «surg-face de Moebius» dans le premier cas.

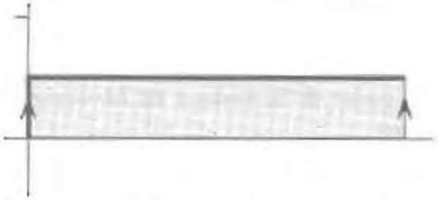
Les droites ne passant pas par l'origine et rencontrant le cercle trigonométrique



Une telle droite ne passant pas par l'origine peut s'obtenir par l'équation $\cos(u)X + \sin(u)Y = v$ où cette fois u est une variable dans $[0, 2\pi[$ et $v$une variable dans $]0, 1]$ (le vecteur de coordonnées $(\cos(u), \sin(u))$ est un vecteur normal et le nombre v est l'abscisse, avec ce vecteur unitaire, du point O, projection orthogonale de l'origine sur la droite.

On a donc ainsi une bijection de l'ensemble des droites dont la distance à l'origine est inférieure à 1 et strictement positive avec la bande $[0,2\pi[\times]0,1]$ Du point de vue topologique, il est clair qu'il faut recoller (sans retournement) les côtés $\{0\} \times]0, 1]$ et $\{2\pi\} \times]0, 1]$.

On obtient ainsi une bande orientable, homéomorphe à une tranche de cylindre.

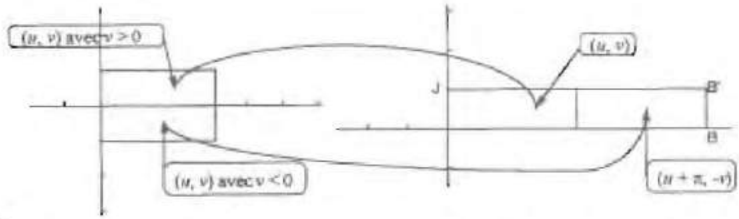


Remarque : la bande est ouverte du côté $v = 0$, On aurait pu éviter ceci en prenant l'ensemble des droites qui rencontrent une couronne centrée à l'origine, c'est-à-dire, par exemple, dont la distance à l'origine est dans l'intervalle $[1, 2]$.

Cet ensemble des droites rencontrant le cercle trigonométrique et ne passant pas par l'origine s'obtient comme complémentaire de l'ensemble des droites passant par l'origine (exemple 3) par rapport à celui de toutes les droites rencontrant le cercle trigonométrique (exemple 2), Nous allons illustrer ceci dans le paragraphe suivant,

Interprétation du découpage de la bande de Moebius

Découpons la bande de Moebius de l'exemple 2 suivant le «cercle» $v = 0$ (et supprimons les points de la coupure). Nous interdisons alors à une droite représentée par un point de la variété de passer par l'origine, ce qui correspond à l'exemple 4. Les couples (u, v) correspondants aux droites considérées vérifient donc soit $v > 0$ soit $v < 0$. Nous pouvons alors faire correspondre à un tel couple soit le couple (u, v) si $v > 0$, soit le couple $(u + \pi, -v)$ si $v < 0$. Nous retrouvons ainsi la bande orientable de l'exemple 2 : le bord constitué des couples (π, v) avec $0 < v < 1$ doit être recollé au bord constitué des couples $(0, v)$ avec $-1 < v < 0$ avec un retournement, mais le bord constitué des couples (x, v) avec $-1 < v < 0$ doit être recollé au bord constitué des couples $(0, v)$ avec $0 < v < 1$ avec aussi retournement, ce qui annule topologiquement l'efliet du premier retournement.



Remarques

1° Ce découpage peut être fait à partir de la surface de Moebius de l'exemple 1. On obtient alors un cylindre.

2° Si, au lieu de s'intéresser aux droites de $\mathbb{R}^2$, on considère les droites orientées, alors la variété obtenue est un cylindre : chaque droite orientée peut être représentée par un couple $(u\ v)$ de $[0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ où u est une mesure de l'angle du vecteur unitaire directement perpendiculaire à la droite orienté avec l'axe des abscisses et v l'abscisse du pied de la perpendiculaire menée de l'origine à la droite, mesurée avec ce vecteur unitaire. On doit alors recoller $\{0\} \times \mathbb{R}$ avec $\{2\pi\} \times \mathbb{R}$ sans faire de retournement.

3° On sent ainsi que la propriété de n'être pas orientable de la variété des droites affines de $\mathbb{R}^2$ tient au fait qu'il est possible de faire coïncider une droite avec elle-même par un mouvement continu de demi-tour. On passe alors nécessairement par une position qui contient l'origine ; si on retire les droites passant par l'origine, on ne peut plus faire ce demi-tour et on doit alors faire au moins un tour complet (en «contournant» l'origine) pour revenir à la droite de départ. On retrouve alors une situation ressemblant topologiquement à celle des droites orientées, qui demandent aussi un tour complet pour revenir à la même position.

4° L'ensemble de toutes les droites de $\mathbb{R}^2$ s'obtient en retirant la droite de l'infini de l'ensemble de toutes les droites du plan projectif réel qui est homéomorphe au plan projectif réel lui-même. Or c'est un exercice classique que de montrer qu'un plan projectif réel dont on a retiré un point est une surface de Moebius ; on retrouve ainsi le résultat de l'exemple 1.

5° La complexité (relative) de la situation n'est sans doute pas étrangère à certaines difficultés de nos élèves concernant les équations de droites, en particulier pour ce qui est de l'intérêt de l'utilisation de trois paramètres «homogènes» pour écrire l'équation générale d'une droite.

6° Ce n'est pas pour des raisons topologiques que les droites ne sont pas manipulables directement dans GEOPLAN, il s'agit d'un choix simplificateur (les objets de base sont des points) qui peut d'ailleurs être remis en cause dans des versions ultérieures si la nécessité s'en impose.

Bibliographie

DITEN 82 et CNAM *Brochure GEOPLAN* Version 2 Diffusion CRDP de Poitou-Charente, 1994, pp 131-141

Laborde C. *Enseigner la géométrie : permanences et révolutions* Bull. APMEP Décembre 1994, pp 523-548

Lehman D. et Sacré C. *Géométrie et topologie des surfaces* P.U.F. 1982