Graphique, démonstration et rigueur : quelques réflexions

André Antibi
Université Paul Sabatier
Toulouse

Le dessin devrait permettre de faciliter l'enseignement des mathématiques et ainsi de le rendre moins abstrait et plus accessible à un grand nombre d'élèves. Or, en France notamment, le dessin ne joue pas ce rôle pleinement ; une majorité d'enseignants, et donc d'élèves, par tradition, restent très méfiants dans l'utilisation du dessin :
- un dessin n'est en aucun cas une démonstration
- le dessin est surtout utilisé en géométrie, rarement en analyse.

Après avoir proposé un inventaire des principales utilisations du graphique en Mathématiques, nous étudierons plus particulièrement son utilisation en analyse, en nous appuyant sur des réactions d'élèves et d'enseignants.

1 - Principales utilisations du graphique en Mathématiques

Parmi les diverses utilisations du graphique en Mathématiques, voici celles qui nous semblent les plus importantes.

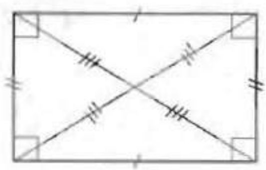
1.1 - Représentation d'objets et de notions

Exemples :

- *En théorie des ensembles :* les diagrammes de Venn classiques pour représenter les notions d'intersection, de réunion, de complémentaire.
- *En géométrie*
  - les figures classiques : cercle, triangle, parallélogramme, parallélépipède rectangle,...
  - les figures-clés : droite des milieux d'un triangle, figure-clé de Thalès,...
- *En analyse :* la tangente à une courbe, pour représenter le nombre dérivé, l'asymptote pour illustrer la notion de limite, une courbe qui "monte de la gauche vers la droite" pour illustrer la notion de croissance,...
- *En algèbre linéaire :* un plan et une droite non contenue dans ce plan permettent de représenter la notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un espace vectoriel de dimension 3.

1.2 Pour résumer et mieux mémoriser les informations

Exemples



- *En géométrie :* Les principales propriétés du rectangle sont indiquées sur la figure classique ci-contre.
- *En analyse :* Lors de l'étude d'une fonction, un tableau de variations résume les propriétés établies. Une courbe résume fort bien les principales propriétés d'une fonction.
- *En trigonométrie,* des formules telles que $\cos(-x = \cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$ peuvent être lues sur un cercle trigonométrique.

1.3 - Pour résoudre un problème

1.3.1 - Pour aider à conjecturer

Exemples :

- *En géométrie :*

  Pour trouver un lieu géométrique, c'est-à-dire un ensemble de points vérifiant certaines propriétés.

  Pour répondre à une question du type "que peut-on dire de trois points A, B, C", une figure permet souvent de voir si, par exemple, ces trois ponts semblent alignés.
- *En analyse :*

  Pour trouver la limite possible d'une suite définie par récurrence.

  Pour encadrer une racine d'une équation.

1.3.2 - Pour aider à trouver une démonstration d'un résultat

Exemple

En géométrie : c'est un des rôles usuels de la figure.

1.3.3 - pour aider le professeur à mieux faire comprendre aux élèves la solution d'un problème

Exemple

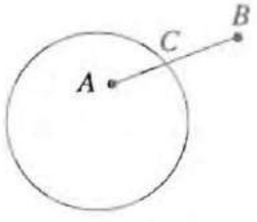
- *En géométrie*, comme précédemment, c'est un des rôles classiques de la figure.

1.3.4 - Le graphique comme outil de validation

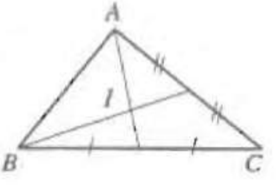
Il s'agit d'une utilisation du type suivant : "ça se voit sur le dessin, donc c'est vrai". Il convient donc bien de différencier cette utilisation de celles qui précèdent. Ici, le graphique est, à lui seul, un outil de validation.

Exemples :

- *En géométrie :*



Si A est un point intérieur à un cercle et B un point extérieur, le segment $[AB]$ coupe le cercle en un point et un seul. En général, cette propriété n'est pas démontrée de manière classique : "ça se voit sur le dessin, donc c'est vrai".



Pour démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes, on démontre usuellement qu'une médiane passe par le point d'intersection I des deux autres. Mais, en général, on ne démontre pas que deux médianes d'un triangle sont concourantes : "ça se voit sur le dessin, donc c'est vrai".

- *En analyse :*

Résolution graphique d'un système d'inéquations.

Problèmes de programmation linéaire.

Comme nous le verrons plus loin, une majorité de professeurs, convaincus de ne jamais utiliser un dessin comme outil de validation, ne réalisent pas qu'ils le font parfois sans s'en rendre compte.

II - Le graphique, en Analyse, pour aider à démontrer

Nous avons signalé ci-dessus (1.3.2 et 1.3.3) qu'en géométrie, le dessin était pratiquement toujours utilisé pour aider à trouver ou à enseigner une démonstration.

Il n'en est pas de même en Analyse.

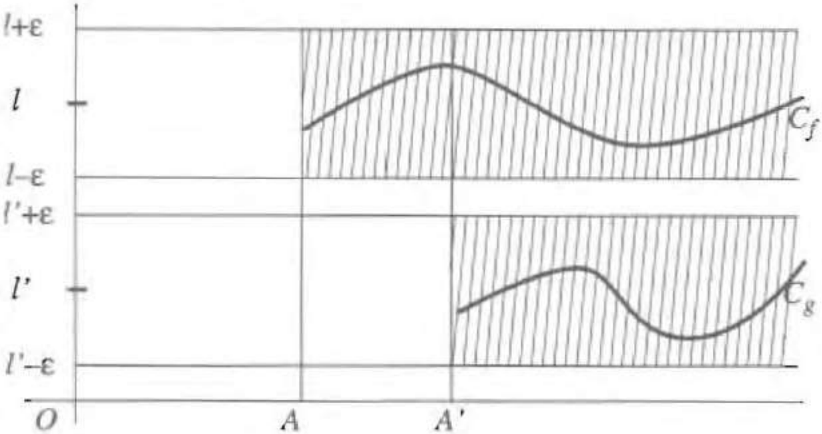
1 - Exemples

Indiquons d'abord des exemples où le graphique peut être une aide dans la résolution d'un problème.

- Exemple 1 : conservation des égalités à la limité

Considérons, par exemple, le cas de la limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \lim\limits_{+\infty} f = l, \lim\limits_{+\infty} g = l' \\ \forall\ x \in \mathbb{R}\ f(x) \leqslant g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow l \leqslant l'$$



Raisonnons par l'absurde. Supposons donc que $l > l'$ et que toutes les hypothèses sont vraies. Notons C_f et C_g les courbes représentant f et g. Dire que $\lim\limits_{+\infty} f = l$ revient à dire, graphiquement, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$, C_f est comprise entre les droites d'équations $y = 1 - \varepsilon$ et $y = 1 + \varepsilon$.

On peut traduire de même l'hypothèse $\lim\limits_{+\infty} g = l'$.

On peut voir alors facilement que si les deux bandes hachurées sont disjointes, c'est-à-dire si on choisit ε assez petit, (par exemple $\frac{l - l'}{3}$), on aboutit à une contradiction : on aurait $g(x) < f(x)$ pour x suffisamment grand.

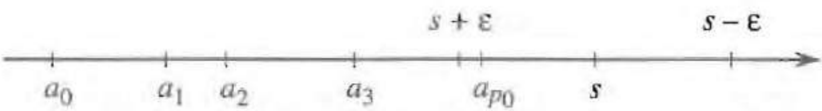
Remarques :

Le graphique est une aide à la résolution de ce problème dans la mesure, bien sûr, où on sait traduire graphiquement la propriété $\lim\limits_{+\infty} f = l$, $\lim\limits_{+\infty} g = l'$.

Comme ci-dessus, le graphique peut être utilisé dans de nombreuses démonstrations d'analyse telles que, par exemple :

- *Si f est continue et $f(a) > 0$, alors $f > 0$ sur un voisinage de a.*
- *Si f est continue et positive* sur *$[a,b]$ et si* $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, *alors* $f = 0$ *sur $[a,b]$.*
- *Si* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *existe et si f admet une limite l en $+\infty$, alors $l = 0$.*

Exemple 2 : *Dans $\mathbb{R}$, toute suite (a_n) croissante majorée est convergente vers* $s = \underset{n \in N}{Sup}\, a_n$.



Il s'agit de montrer que dans tout intervalle de centre s, de rayon ε, il y a tous les termes de la suite *(a_n) à partir d'un certain rang. Soit donc* $[s-\varepsilon, s+\varepsilon]$ un tel intervalle. Puisque $s-\varepsilon < s+\varepsilon$ n'est pas un majorant de tous les a_n (car la borne supérieure est le plus petit des majorants). Il existe donc p_0 *tel* que $a_{p_0} > s-\varepsilon$. Il est clair alors, puisque (a_n) est croissante, que pour tout $n \geqslant p_0$, $a_n > s-\varepsilon$. ainsi, pour tout $n \geqslant p_0$, $a_n \in [s-\varepsilon, s+\varepsilon]$.

2 - La situation effective

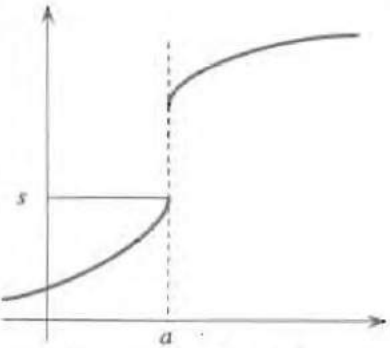
En France, et également dans d'autres pays (voir par exemple [4]), on utilise très rarement le graphique en analyse pour aider à démontrer. A mon avis, ceci est regrettable car on prive ainsi nos élèves, surtout les "moins bons", d'une aide précieuse.

Ce rejet du graphique est tellement excessif que beaucoup d'élèves pensent même que la seule présence d'un graphique lors d'une démonstration d'analyse rend cette démonstration non valable, même si elle est correctement écrite !

Ainsi, par exemple, au cours d'interrogations orales en Classes

Préparatoires aux Grandes Ecoles, j'ai été amené très souvent à expliquer, en m'appuyant sur un graphique, pourquoi une fonction croissante f admet en tout point une limite à gauche.

On démontre, comme dans l'exemple , que la limite à gauche de f en a est égale à la borne supérieure s de l'ensemble des nombres $f(x)$ tels que $x < a$.



A la fin de ma démonstration, beaucoup d'élèves qui semblaient pourtant convaincus par mes justifications s'exclament :

- *"Oui !, mais où est la démonstration ?"*

Je leur réponds alors :

- *"Il suffit d'écrire ce que je viens de vous expliquer et que vous semblez avoir compris"*
- *"Mais on n'a pas le droit de démontrer avec un dessin"*, me répondent-ils.

J'essaie alors de leur expliquer que le dessin a simplement servi à mieux leur faire comprendre une démonstration (qu'ils n'avaient d'ailleurs pas su faire), mais qu'en aucun cas le dessin seul tenait lieu de démonstration. J'ajoute également que, en géométrie, le dessin est toujours utilisé ainsi. Je dois avouer que, le plus souvent, les élèves sortent de la salle d'interrogations sans être vraiment convaincus par mon discours.

L'anecdote suivante, me semble-t-il, illustre assez bien le comportement de certains enseignants à ce sujet. En 1972, à l'Université de Montréal, lors d'un séminaire auquel je participais, le conférencier, "bloqué" à une étape d'une démonstration d'analyse, se précipita sur le côté gauche du tableau. Alors, en prenant bien soin que personne ne pouvait voir ce qu'il écrivait, il fit un petit dessin, qu'il effaça aussitôt, et revint, souriant et soulagé, poursuivre son exposé : le dessin l'avait donc "débloqué". Malheureusement, personne, à part le conférencier, n'a jamais su quel était ce fameux dessin "magique".

III - Le graphique, en Analyse, comme outil de validation

Nous allons voir à présent à quel point le graphique, en Analyse, n'est pas accepté comme outil de validation.

1 - Réactions d'enseignants

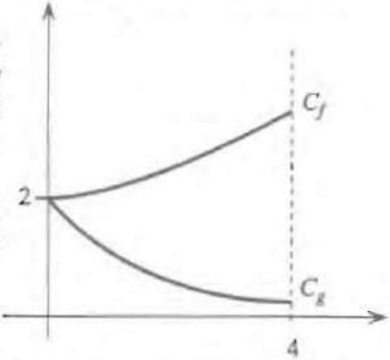
La situation suivante a été proposée à une centaine d'enseignants dans différents stages à l'IREM de Toulouse en 1993 et 1994.

La question 1 d'un problème en classe Terminale Scientifique est consacrée à l'étude de deux fonctions définies sur [0,4]. Plus précisément, on fait démontrer que :

- *$f(0) = g(0) = 2$*
- *f est croissante sur [0;4] et g décroissante sur [0;4]*

On fait ensuite construire les courbes C_f et C_g représentant ces fonctions.

*Dans **la question 2**, on demande alors : "Montrer que, sur [0;4], $g \leq f$.*



Un élève répond convenablement à la question 1 et construit les courbes C_f et C_g ci-contre, et il apparaît clairement sur son graphique que C_g est au-dessous de C_f.

Les professeurs interrogés doivent se prononcer sur trois types de réponses à la question 2 :

a) $g \leq f$ car ça se voit sur le dessin

b) $g \leq f$ car C_g est au-dessous de C_f.

c) Soit x un réel quelconque sur [0;4] ; $g(x) \leq g(0)$ car g est décroissante sur [0;4] ;
f étant croissante sur [0;4], on a donc $f(0) \leq f(4)$. Or $f(0) = g(0) = 2$.
Donc $g(x) \leq 2 \leq f(x)$. D'où $g(x) \leq f(x)$; Donc, sur [0;4], $g \leq f$.

Plus précisément, la question était supposée notée sur deux points. Les professeurs doivent dire la note qu'ils mettraient dans chacun des trois cas. Les résultats, en pourcentages, sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

Note sur 2 / Réponse	0	0,5	1	2
a) $g \leq f$ car ça se voit sur le dessin	90%	10%	0%	0%
b) $g \leq f$ car C_g est au-dessous de C_f	80%	15%	5%	0%
c) Démonstration "classique"	0%	0%	0%	100%

2 - Commentaires

Il apparaît très nettement que les démonstrations utilisant le graphique comme seul outil de validation ne sont absolument pas acceptées. Le rejet quasi unanime de ce type de démonstration peut surprendre. En effet, l'une des utilisations essentielles des représentations graphiques dans toutes les disciplines (histoire, géographie, économie, physique,...) repose sur la propriété suivante :

$g \leqslant f$ sur $[a,b]$ équivaut à C_g au dessous de C_f sur $[a,b]$.

Ainsi, cette propriété fondamentale, acceptée partout ailleurs, ne l'est plus en Mathématiques. La situation est encore plus troublante car, même en Mathématiques, elle est parfois acceptée, dans l'enseignement secondaire, en conformité d'ailleurs avec les programmes ; par exemple, pour résoudre un système d'inéquations, ou bien encore dans les problèmes de programmation linéaire.

On peut être sensible au principal argument donné par les professeurs qui n'acceptent pas cette utilisation : *«On ne peut pas démontrer avec un graphique, car ça peut être dangereux»*.

Il convient cependant de noter certains paradoxes dans nos traditions d'enseignement : parfois, le simple fait de voir sur le dessin suffit pour justifier, par exemple, pour justifier le fait que deux médianes d'un triangle se coupent ou pour résoudre un problème de programmation linéaire. Parfois, au contraire, ce type de justification n'est absolument pas accepté, même lorsqu'il n'y a aucun danger. C'est le cas de l'exemple proposé ci-dessus : en effet, les courbes C_f et C_g sont entièrement visibles sur le dessin.

Donc, dans la mesure où leur tracé est considéré comme correct, ceci implique à mon avis que, implicitement, la position relative de l'une par rapport à l'autre a été acceptée.

Conclusion

Il apparaît clairement que le graphique est très peu utilisé, en Analyse, dans les démonstrations. Nous avons bien distingué les deux utilisations suivantes :

- le graphique pour aider à démontrer
- le graphique comme outil de validation.

Dans le premier cas, comme en géométrie, le graphique ne se substitue pas à la démonstration classique. Il peut servir à guider, à aider à chercher, à mieux expliquer. Il conviendrait donc de modifier nos comportements traditionnels dans ce domaine et de nous appuyer bien plus sur les graphiques.

Dans le second cas, il serait souhaitable de préciser, soigneusement, dans les programmes scolaires, certaines situations, très classiques et non ambiguës, où le graphique peut être utilisé comme outil de validation. Ce type de réflexion sur les niveaux d'exigence et de rigueur des solutions proposées par les élèves devrait d'ailleurs avoir lieu dans tous les domaines de notre enseignement, et pas seulement au sujet des graphiques (voir [2]).

Dans la mesure où rien n'est précisé dans les programmes scolaires à ce sujet, on peut comprendre à la rigueur le rejet quasi unanime du graphique comme outil de validation. Par contre, la très faible utilisation du graphique en analyse pour aider à démontrer ne peut s'expliquer que par une très regrettable tradition de notre système éducatif.

Bibliographie

[1] André ANTIBI (1988), *Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions*. Thèse d'Etat, IREM de Toulouse.

[2] André ANTIBI (1995) : *Programmes scolaires et niveaux de rigueur*. Bulletin APMEP Toulouse (à paraître).

[3] Gilbert ARSAC (1988), *Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France*. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.9, n°3, pp.247-280.

[4] Tommy DREYFUS, *On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education*, Proc. PME XV, Assisi ; Italy, F. Furinghetti (ed.) pp 33-48, 1991.

[5] Eduardo LACASTE ZABALZA : *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques ; illusions et contrôles*. Thèse, Univ. de Bordeaux 1.