ATELIER M14
Fondements pour un enseignement de l'Analyse en termes d'ordre de grandeur

Abdenacer MAKHLOUF - Etienne MEYER

L'objectif de ces ateliers est la présentation d'une alternative à l'enseignement de l'Analyse, utilisant les infinitésimaux, contenue dans la brochure APMEP n°103 : "*Fondement pour un enseignement de l'Analyse en termes d'ordres de grandeur : les réels dévoilés*" par R.Lutz, A. Makhlouf et E. Meyer.

L'intervention est organisée sur deux séances, la première séance est consacrée aux motivations et à un développement de l'aspect numérique de l'Analyse et une deuxième séance est consacrée à l'aspect fonctionnel avec l'établissement de l'équivalence entre le point de vue infinitésimal et le point de vue classique.

L'aventure des infinitésimaux

Il s'agit d'un retour aux sources de l'Analyse à la manière de Leibniz. La définition de limite en vogue au XVIII^{e} siècle utilisait les infinitésimaux. Ces quantités dépourvues de fondement logique sont tombées en désuétude, et la notion de limite a trouvé une autre définition à l'aide des inégalités. Cette approche, irréprochable sur le plan de la logique, n'est pas conforme à l'idée intuitive de la limite et conduit à des raisonnements contravariants (lorsqu'on fait un calcul, on ne connaît pas à chaque étape le résultat auquel on va aboutir : c'est une démarche covariante ; au contraire, dans un raisonnement contravariant, il faut connaître avec précision le but à atteindre). Les infinitésimaux ont réapparu et sont réhabilités par le logicien A. Robinson (1960) en proposant un modèle non standard des réels et en fondant l'Analyse non standard. Un point de vue formel de l'Analyse Non standard est proposé par E.Nelson (1977), il s'agit d'une extension de la théorie de Zermelo et Franckel en adjoignant le prédicat standard et trois axiomes qui le régissent. Ces idées infinitésimales ont eu une fécondité reconnue dans de nombreux domaines de la recherche mathématique ; une application didactique s'impose. A cet effet, un cadre élémentaire, inspiré de l'Analyse non standard avec un vocabulaire plus approprié, est présenté dans la brochure citée ci-dessus.

Réhabilitation de l'aspect numérique en Analyse

A partir de l'exemple "si la limite de f(x) est égale à 0 quand x tend vers 0 alors la limite de f(x^2) est égale à 0 quand x tend vers 0", on compare les différentes démonstrations : la démonstration classique qui est difficile à présenter à des élèves de lycée, la démonstration heuristique qui traduit bien l'idée intuitive mais qui ne s'écrit pas en termes mathématiques classiques et la démonstration infinitésimale qui est simple, directe et transcrit mathématiquement la démonstration heuristique. Cet exemple donne le ton de ce que vont être les démonstrations dans un environnement ou les infinitésimaux existent.

Une extension faible permet d'introduire la notion de grandeur dans l'ensemble des entiers naturels. On a ainsi des entiers naturels modérés et des entiers naturels très grands. Cette notion d'ordre de grandeur est élargie aux rationnels et aux réels. On a ainsi des nombres réels très grands et des nombres réels très petits ; les nombres réels non très grands sont dits modérés. On introduit également une notion de proximité, x très proche de y, accompagnée de règles d'approximation très simples à découvrir et à démontrer. Un travail sur la nature d'expressions algébriques dépendantes d'un nombre x très grand ou très petit ou très proche d'un nombre donné r permet de faire de l'Analyse sur les nombres et prépare ainsi à l'étape fonctionnelle suivante. On démontre par exemple que si z = racine($1+x$) où x est un nombre très petit alors $z = 1+x/2(1+t)$ où t est un nombre très petit. On réagit immédiatement en disant que ce qu'on obtient est un développement limité, or dans la démonstration on ne fait que des manipulations algébriques sur des nombres sans parler un seul instant de fonction ni de ses dérivées. Le traitement "à la main" d'expressions numériques prépare évidemment l'élève à un apprentissage plus facile de l'Analyse. Par la suite l'accent sera mis plus sur la notion elle-même que sur le calcul qui l'accompagne.

Le cadre avec les ordres de grandeur est insuffisant pour faire toute l'Analyse habituelle ; il est impossible par exemple de distinguer les nombres réels de la forme $3+t$ où t est très petit. Un second niveau d'extension est nécessaire.

L'aspect fonctionnel de l'Analyse

Dans le nouveau cadre appelé ZFE, nous avons des réels bien déterminés par exemple 3 et des réels non bien déterminés par exemple $3+t$ où t est un réel très petit et non nul. On retrouve naturellement les ordres de grandeur et toute l'analyse approximative qui vont permettre de définir les divers concepts de l'Analyse. Ainsi, la définition de limite est établie comme nous le suggère l'intuition et les calculs se font à l'instar de l'analyse approximative sur les nombres. On montre également une équivalence entre la définition classique et la définition infinitésimale de la limite pour les fonctions bien déterminées (celles qu'on étudie au lycée). Les théorèmes classiques de l'Analyse (théorème des valeurs intermédiaires, toute fonction continue sur un intervalle fermé est bornée, toute suite croissante et majorée est convergente ...) possède dans le cadre de ZFE des démonstrations d'un type nouveau accessible à un élève de lycée.

La plupart des réactions des participants aux deux ateliers ont concerné l'applicabilité de cette approche à l'heure actuelle. Nous avons jeté les bases d'un nouvel enseignement de l'Analyse et nous voulons qu'un débat de fond s'ouvre parmi les professeurs afin de bâtir une pédagogie cohérente. Il est clair que beaucoup de travail reste à faire afin d'élaborer des documents utilisables par l'enseignant et des expérimentations sont à mener avec des vrais élèves et peut-être des professeurs non rompus à ce genre de pratiques.

Quelques échanges ont eu lieu également sur le point de vue adopté pour l'approche théorique de notre part. Certains participants pensent qu'une approche issue des travaux de Robinson (on enrichit l'ensemble des réels d'éléments nouveaux) est préférable à celle que nous avons présentée, issue des travaux de Nelson (on ne change pas l'ensemble des réels, mais on enrichit le langage d'un nouveau prédicat). La question n'est pas tranchée : on peut souhaiter dans ce cadre-là aussi des expérimentations (et l'élaboration préalable des fondements pour une approche élémentaire, comme nous l'avons fait pour le point de vue adopté).

Puisse l'APMEP contribuer aux échanges et à la réflexion sur ces travaux.