ATELIER M23
Du géométrique au numérique : Euclide - Dedekind, qui a inventé les réels ?

Michel HENRY
IREM de Besançon

Ce compte rendu d'atelier présente le plan commenté de l'exposé et renvoie aux ouvrages de référence pour trouver les documents qui ont fait l'objet du travail en séance.

Le point de départ de l'atelier était de montrer la présence implicite et nécessaire des nombres réels dans la géométrie d'Euclide. La propriété des lignes proportionnelles, appelée dans nos classes "théorème de Thalès" cristallise ce problème.

Comment Euclide l'obtient-il sans un recours explicite aux réels ?

Quelle interprétation les géomètres du XVII^e siècle en ont-ils donné ?

Quel impact sur cette question de la philosophie des "gens de Port Royal" ?

Quel éclairage nouveau Legendre apporte-t-il au début du XIX^e siècle en reprenant la méthode des aires ?

A quel point la théorie des proportions d'Eudoxe a-t-elle inspiré Dedekind pour fonder sa théorie des coupures et donner une existence constructive aux nombres réels ?

L'atelier, par un parcours historique, avait pour but de présenter des réponses à ces questions, extraites des textes authentiques, pour montrer en quoi le géométrique était, dès Euclide, porteur du développement du numérique. Le plan de l'atelier fut le suivant :

I - Pythagore et Thalès par la méthode des aires dans les éléments d'Euclide

I.1 - Dans Pythagore, pas de numérique

a) Brève présentation du Livre I des éléments : la 5ème demande, les cas d'égalité des triangles par superposition, les premières propriétés du parallélisme, comparaisons d'aires par découpages et regroupements, la propriété de base de la méthode des aires : deux triangles de même sommet et dont les côtés opposés sont de longueurs égales et sont portés par la même droite, sont d'aires égales.

b) Petite incursion dans les "*élémens de géométrie*" de Clairaut (1753), le même résultat découle de la définition de l'aire du rectangle comme produit de la longueur par la largeur. Approche pragmatique fondamentalement différente de celle d'Euclide.

c) La démonstration par Euclide du "théorème de Pythagore" (dernière proposition du Livre I) par la méthode des aires : pas d'appel à une mesure de grandeur quelle quelle soit. Au contraire, dans nos classes Pythagore est associé très directement au travail sur le numérique, comme support du fonctionnement de la racine carrée.

I.2 - Thalès : quels prérequis ?

a) Présentation du début du Livre VI des éléments : démonstration très simple de la proposition II (théorème de Thalès) par la méthode des aires, nécessité de donner du sens à la proportionnalité entre les aires de deux triangles de même sommet et dont les côtés opposés sont portés par la même droite, et les longueurs de ces côtés (proposition I).

b) Argument d'Euclide : la proposition I du Livre VI, clé de toute la suite de sa géométrie des grandeurs et de leurs mesures, passe par une définition rigoureusement fondée de l'égalité de deux "raisons" (rapport) de grandeurs. Nécessité de la théorie des proportions d'Eudoxe (Livre V des éléments) et statut charnière de la définition 6 de l'égalité de deux raisons. Le numérique est incontournable dans la propriété de Thalès.

c) Argument de Legendre (1823), reprenant la démarche de Clairaut : l'aire du rectangle comme produit Longueur × largeur est la clé de la démonstration de la propriété de Thalès par la méthode des aires.

II - La démonstration de Clairaut (Méray, Guichard ...) : problèmes de limites

II.1 - Découverte de grandeurs irrationnelles

a) Dialogue du Ménon de Platon : on peut construire certaines grandeurs sans pouvoir les mesurer, exemple du carré double (en aire) d'un carré donné, construit sur sa diagonale.

b) Le côté d'un carré et sa diagonale sont incommensurables. Démonstration par antiphérèse qui n'utilise pas de nombres ni de mesures.

c) Retour à la configuration de Thalès : que signifie un rapport de longueurs non commensurables ?

II.2 - La réponse pragmatique de Clairaut : mener des parallèles équidistantes et "voir" la proportionnalité de Thalès. C'est clair avec des segments dans un rapport rationnel transporté par ce réseau de parallèles. Sinon, on néglige les petits segments qui restent après un découpage fin en parallèles équidistantes, poussé "à l'infini". On voit bien qu'ils sont plus petits que toute longueur "assignable", donc ne détruisent pas la "rigueur" de l'égalité des rapports de Thalès..

II.3 - La démonstration (plus) rigoureuse de Meray, Guichard (fin du XIX^e siècle) ...

Reprenant la démarche de Clairaut préconisée par la philosophie de Port Royal (Arnauld et Nicole, liés à Pascal), la démonstration de la propriété de Thalès par l'utilisation d'un réseau de parallèles équidistantes est complète, moyennant un passage à la limite pour un rapport irrationnel : nécessité des nombres réels.

III - Legendre : la méthode des aires par l'aire du rectangle

III.1 - On revient à la démonstration de Legendre par la méthode des aires, à partir de la formule de l'aire du rectangle. Où se cache donc la limite?

III.2 - La définition de l'aire du rectangle n'a de sens que si la longueur et la largeur sont commensurables. Mais comment donner du sens à leur produit lorsque les longueurs en jeu ne sont pas commensurables ? Legendre explicite la difficulté et obtient le résultat par une double réduction à l'absurde équivalente à un passage à la limite. Il souligne la nécessité des nombres "entiers ou rompus, commensurables ou incommensurables" permettant de transformer une proportion entre grandeurs en une proportions entre les nombres qui les mesurent. Il faut bien en convenir, l'aire du rectangle requiert les réels !

Euclide le savait-il ? Voyons ce que cache la théorie des proportions.

IV - Eudoxe : la théorie des proportions, Livre V des éléments

IV.1 - Le problème de la mesure des grandeurs : comment comparer des grandeurs incommensurables ?

IV.2 - Les bases de la théorie des proportions : le rôle clé de la définition 6.

IV.3 - Les calculs avec des proportions : démonstrations abstraites et rigoureuses

V - Coupures de Dedekind

V.1 - Définition d'une coupure dans un ensemble totalement ordonné (partition en deux parties dont tous les éléments de l'une sont inférieurs à tous les éléments de l'autre). Exemple de la coupure dans $\mathbf{Q}^+$ déterminée par la comparaison entre le carré d'un nombre et 2. La Théorie des Ensembles comme outil pour une construction intuitive des réels par les coupures

V.2 - Coupure dans **Q** associée à la raison entre deux grandeurs de même espèce, où l'on retrouve la définition 6 de la théorie des proportions. Exemple de la coupure dans l'ensemble des longueurs de segments par comparaison avec la longueur de la diagonale d'un carré.

V.3 - Isomorphisme entre raisons de grandeurs et coupures (réels). Propriétés algébriques des réels, démonstrations techniques : on retrouve dans l'exposé de Dedekind les mêmes questions que dans la théorie des proportions, clarifiées par la puissance de la symbolique moderne.

V.4 - Ce qu'Eudoxe et Euclide n'ont pas obtenu : La topologie de **R**.

VI - Conclusion

La géométrie, source des mathématiques grecques, atteint ses **"limites"** avec la propriété de Thalès. Il aura fallu des siècles pour que le calcul infinitésimal et le développement du numérique débouchent sur la théorie des limites, et pour que l'analyse prenne le relais pour fonder complètement les réels. Mais il aura fallu aussi la crise des fondements pour révéler l'importance d'une axiomatique formelle pour expliciter et valider les résultats qui s'accumulaient au XIX^E^ siècle. Mais les réels existaient en filigrane dans la géométrie d'Euclide, et, selon ses propres commentaires, la théorie des proportions a inspiré Dédekind.

Références bibliographiques :

– *Autour de Thalès*, brochure de la commission inter-IREM Premier Cycle : notamment l'article de Rudolf Bkouche *Autour du théorème de Thalès*, sa bibliographie est très complète, et l'article de Henri Plane *Le théorème de Thalès, une invention française du XX^E^ siècle.*

– Le livre de Jean Dhombres *Nombre, mesure et continu*, Cedic-Nathan, publié par l'IREM de Nantes. On y trouvera une analyse détaillée de la théorie des proportions et sa réponse à la question : Euclide ou Dedekind, qui a inventé les réels ?

– Les Éléments d'Euclide (traduction de Peyrard de 1819), ou dans *Euclide : les Éléments*, nouvelle traduction et notes de Bernard Vitrac, publiés chez P.U.F. (1994).

– Les *élémens de Géométrie* de M. Clairaut, réédités par Siloë, dans toutes les bonnes bibliothèques d'IREM. On peut trouver une présentation de cet ouvrage dans l'article d'Évelyne Barbin paru dans Repères-IREM n°4 *Les éléments de géométrie de Clairaut, une géométrie problématisée.*

– *Les éléments de géométrie* de A. M. Legendre, chez Firmin Didot, libraires à Paris (1823), dans les bibliothèques universitaires.