ATELIER S06
Les surprises de l'enseignement par situations

Claude VILLERS
Vice-Président de la Société Belge
des Professeurs de Mathématiques

En octobre 1995, j'ai eu le privilège et surtout le plaisir de participer aux Journées Nationales APMEP à Grenoble et d'y présenter, avec le concours de mon collègue André Parent, un exposé dépeignant, dans les grandes lignes, l'enseignement des mathématiques, au niveau Collège, en Belgique francophone et donnant un aperçu succinct des réformes appliquées depuis peu dans les premières années de cet enseignement secondaire.

Dans l'optique d'un prolongement à cette intervention, j'ai pu détailler, lors des journées 1996 à Albi, le développement d'une activité de classe, au cours d'une intervention dont le propos était d'illustrer les développements inattendus qui peuvent apparaître lors d'une étude «divagatoire» d'un sujet apparemment éloigné du programme.

Rappelons, en tout premier lieu, qu'en Belgique francophone le principe déclaré sur lequel doit être basée l'activité scolaire, au cours des premières années de l'enseignement secondaire en tout cas, est le suivant : *l'enseignement doit contribuer à la formation générale de tous les élèves.*

Par quels moyens, voilà bien la question qui se pose.

Les textes officiels y répondent en préconisant d'atteindre cet objectif:

- par une pédagogie de la recherche qui :
  - accorde une place importante aux raisonnements.
  - stimule le désir de savoir.
  - favorise l'expression et la communication.
- par un enseignement en spirale qui prévoit un enrichissement et une théorisation progressive par passages successifs sur une même matière et qui permet d'étudier simultanément plusieurs points de la matière dans un même thème (pratique de l'enseignement ***par situations***).

Mais alors, qu'est donc cette pédagogie des situations ?

Les interprétations peuvent en être très différentes.

- Pour certains, cela se limitera à proposer un thème que l'on traite systématiquement pendant un temps généralement assez long et à travers lequel on met en évidence des notions à enseigner.

- Pour d'autres, il s'agira de proposer des problèmes pour lesquels une méthode de résolution n'est pas immédiate et qui, principalement, obligent l'élève
  - à s'engager dans des tentatives,
  - à en décider de la validité,
  - à pratiquer l'acharnement lucide,
  - à établir des conjectures, à les contrôler et à en rechercher des preuves,
  - à acquérir de nouvelles connaissances.»

Je crois personnellement qu'une pédagogie des situations peut se développer, à la fois fréquemment et naturellement, dans les classes à partir du moment où le professeur accepte de centrer son enseignement sur l'activité créatrice de l'élève.

Mais alors il voyage entre certitudes et interrogations, et ce n'est pas toujours confortable.

Un exemple

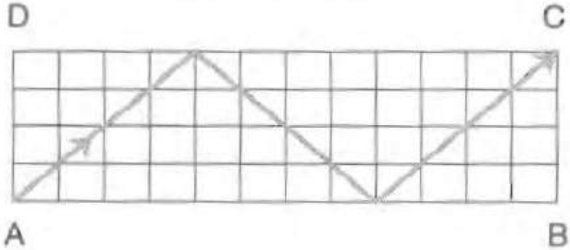
La situation est apparue à l'occasion de la représentation, par des élèves de l'école, de la pièce de Lewis Caroll «*Par delà le miroir*». Suite à divers commentaires nous avons été amenés à envisager la question que voici :

> *«Le Lapin blanc se trouve devant un "carré" de salades. Comment peut-il s'en repaître?»*

Fixer le point d'entrée dans le carré de salades, y définir un mode de déplacement et trouver le point de sortie,telles furent les principales préoccupations.

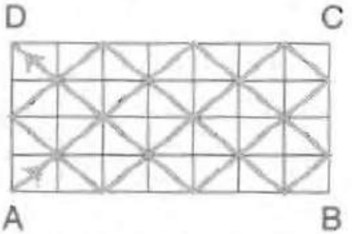
Très rapidement, le groupe a abandonné l'aspect «potager» du problème pour le remplacer par des considérations plus mathématiques. Nous avons supposé que chaque salade serait représentée par un point d'un quadrillage.
Nous avons convenu d'utiliser un quadrillage à maille unitaire dans un rectangle de dimension $a \times b$ avec a et b nombres naturels non nuls et $a > b$.
Parmi tous les modes de déplacement proposés (et qui ont aussi été des sources de découvertes intéressantes), nous avons examiné plus spécialement celui qui consiste à entrer dans le quadrillage par un de ses sommets, par suivre les directions diagonales rebondissant quand c'est nécessaire jusqu'à sortir par un des autres sommets du rectangle global (cf. figure suivante).
Remarquons que cette situation est isomorphe à celle du problème classique du déplacement d'une bille idéale sur un billard (idéal) rectangulaire.

Quelques essais avec des valeurs numériques.
a=12 et b=4



Le trajet est simple. On entre en A et on sort en C
C'est dû au fait que $12 = 3 \times 4 =$ un multiple de 4.

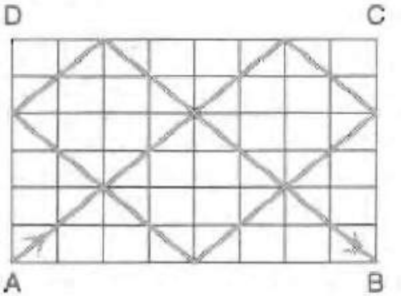
a = 7 et b = 4



Le trajet est moins simple. On doit s'y déplacer de gauche à droite et aussi de droite à gauche. Certains des segments qui le composent, se coupent .
On entre en A et on sort en D.

Pouvait-on prévoir cela sans dessiner le trajet ? Oui, et simplement encore bien.
Il suffit d'attribuer des coordonnées aux points du quadrillage et de découvrir que chacun d'eux possède une caractéristique en relation avec la notion de parité.
La somme des éléments de la coordonnée est paire ou impaire.
Le passage d'un point à l'autre du quadrilllage au cours du trajet, ne change pas la parité. (Pourquoi ?).
Or, on part de A(0,0) qui est un point pair donc on doit sortir par un point pair.
Ce ne peut-être ici qu'en D(0,4) qui est aussi pair alors que B(7,0) et C(7,4) sont impairs.

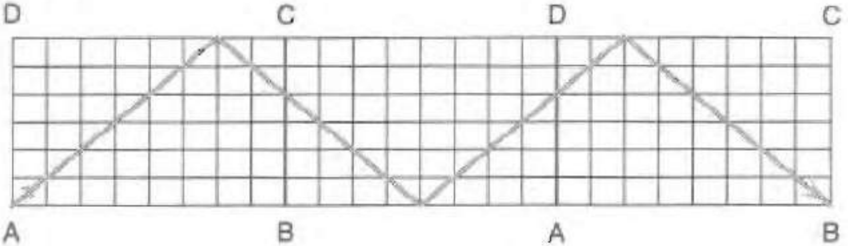
a = 8 et b = 6



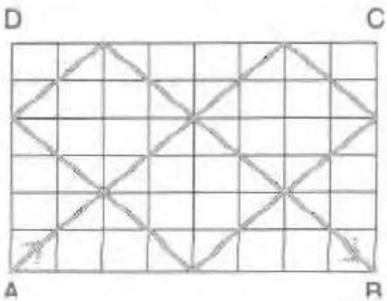
Ici encore le trajet est complexe. Si on part de A(0,0) qui est pair alors on doit sortir en un sommet pair. Or B(8,0), C(8,6) et D(0,6) sont tous pairs. On ne peut ainsi pas prévoir en quel sommet on sortira. Mais ce ne sera pas en A !

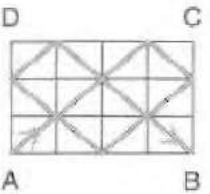
Les lignes se recoupent ; c'est gênant.
Idée : on va éviter cela en imaginant qu'on juxtapose, par retournements, autant de fois que c'est nécessaire, le même quadrillage, à droite du premier, jusqu'à ce que le trajet atteigne un sommet donc un point de sortie.

pour a = 8 et b = 6



Il est clair alors que l'on sort lorsque le nombre de colonnes est le plus petit nombre qui soit multiple commun de a et de b. On le désigne par m(a,b).
De plus, la situation du quadrillage 8×6 c est homothétique à celle d'un quadrillage 4×3.





En appliquant le principe de la parité, il est alors possible de prévoir en quel sommet on va sortir.

Le quadrillage 8×6 est «équivalent» au quadrillage 4×3.

Dans ce dernier, si on part de A (sommet pair) alors on sort en B(4,0) qui est le seul autre sommet pair.

Il en sera donc de même pour le quadrillage 8×6 qui lui est homothétique.

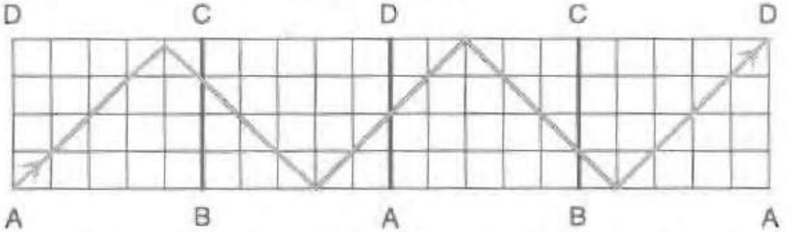
On va donc, à l'avenir, s'intéresser à la situation d'un quadrillage $(a \times b)$ avec $a > b$ et pour lequel **le plus grand nombre naturel qui divise à la fois a et b que l'on désigne par D(a,b) vaut 1**

Autre exploitation : $a = 5$ et $b = 4$

On a bien $D(5,4) = 1$.

Nous savons que dans ce cas, la sortie se fait au sommet de caractéristique paire c'est à dire en D(4,0) puisque les autres sommets B et C sont des sommets impairs.

De plus, comme $m(5,4) = 20$, nous pouvons aussi travailler avec une juxtaposition «horizontale» de 4 quadrillages 5×4.



Et l'on "voit" bien qu'une résolution du problème consiste à rechercher combien de fois b est contenu dans a, 2a, 3a, ... c'est-à-dire à effectuer les **divisions** des multiples successifs de a par b jusqu'à l'obtention d'un reste nul (dernière division).

Pour l'exemple, on a et on voit:

$$1 \times 5 = M4 + 1$$
$$2 \times 5 = M4 + 2$$
$$3 \times 5 = M4 + 3$$
$$4 \times 5 = M4$$

De même pour un quadrillage 12×5, on a bien $D(12,5) = 1$.

On a, en outre, $m(12,5) = 60 = 12 \times 5$ d'où l'utilisation de 5 quadrillages juxtaposés (à réaliser par les sceptiques).

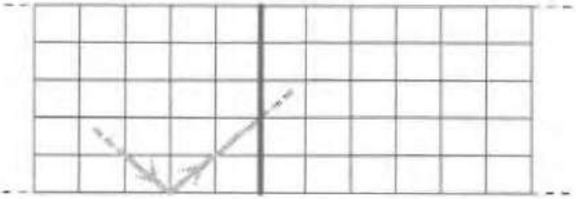
En plus:

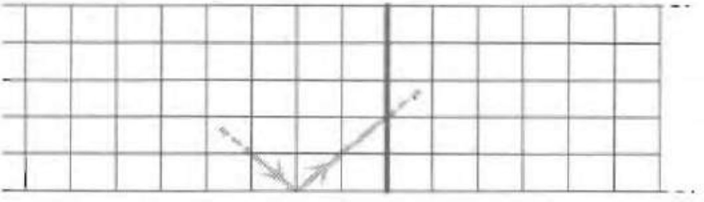
$1 \times 12 = M5 + 2$
$2 \times 12 = M5 + 4$
$3 \times 12 = M5 + 3$
$4 \times 12 = M5 + 1$
$5 \times 12 = M5$

Nous remarquons que tous les restes sont différents.

Cela se justifie graphiquement sur le quadrillage correspondant.

En effet, le fait que deux restes soient égaux signifierait, pour ce deuxième reste, une même "situation" que pour le premier (à un déplacement ou un retourement près) donc voudrait dire que l'on a déja atteint précédemment un point de sortie pour le trajet (sinon tout recommence).





De plus, nous avons obtenu 4 restes non nuls inférieurs à 5. Donc nous avons obtenu, comme restes, tous les nombres naturels de 1 à 4 (inclus).

On Peut alors généraliser.

Soit deux naturels a,b avec a > b et D(a,b) =1

Alors, on a:

$1 \times a = Mb + r_1$
$2 \times a = Mb + r_2$
$3 \times a = Mb + r_3$
...
$(b-1) \times a = Mb + r_{b-1}$

et tous les r_i sont différents.

Si nous multiplions ces égalités, membre à membre, nous obtenons

$(b-1)!\,a^{b-1} = Mb + (b-1)!$

donc $(b-1)!\,a^{b-1} - (b-1)! = Mb$

ou $(b-1)!\,(a^{b-1} - 1) = Mb$

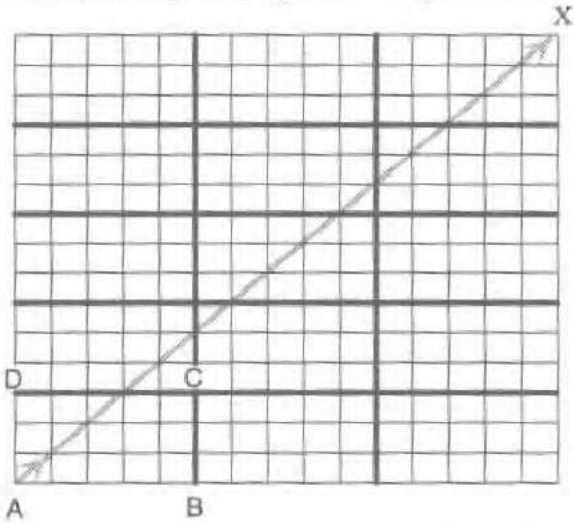
Interprétons cette dernière égalité.
b est diviseur du premier membre.
S'il est composé, tous ses facteurs peuvent se retrouver parmi ceux de (b–1)!
Mais s'il est premier alors ce n'est pas le cas et b n'est pas diviseur de (b–1)!
Il l'est donc du deuxième facteur.

Dès lors:

Si b est un nombre premier et si D(a,b)=1 alors b divise ab–1 – 1

C'est «le» **théorème de Fermat.**

Une autre exploitation a été la suivante :
Plutôt que de juxtaposer des quadrillages «en ligne», il était possible de le faire «en colonnes ».
Ainsi pour un quadrillage 5 × 3, on pouvait juxtaposer (en lignes) 3 rectangles de longueur 5 ou juxtaposer (en colonnes) 5 rectangles de hauteur 3. Cela revient donc à considérer un carré de côté 15 = m(5,3). Le trajet rectifié est donné par la diagonale issue le A.



Si on entre en A alors on sort au sommet qui correspond à X. Des considérations de symétries orthogonales et de leur composée permet de retrouver ce sommet. (Nous savons par application du principe de parité que ce sera C).

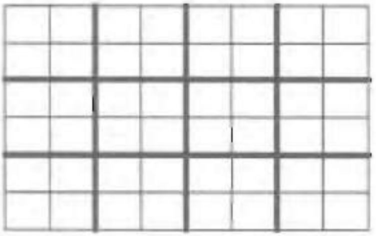
Conjecturons 1

Soit A un rectangle $a \times b$ (a,b sont deux nombres naturels non nuls et $a>b$).

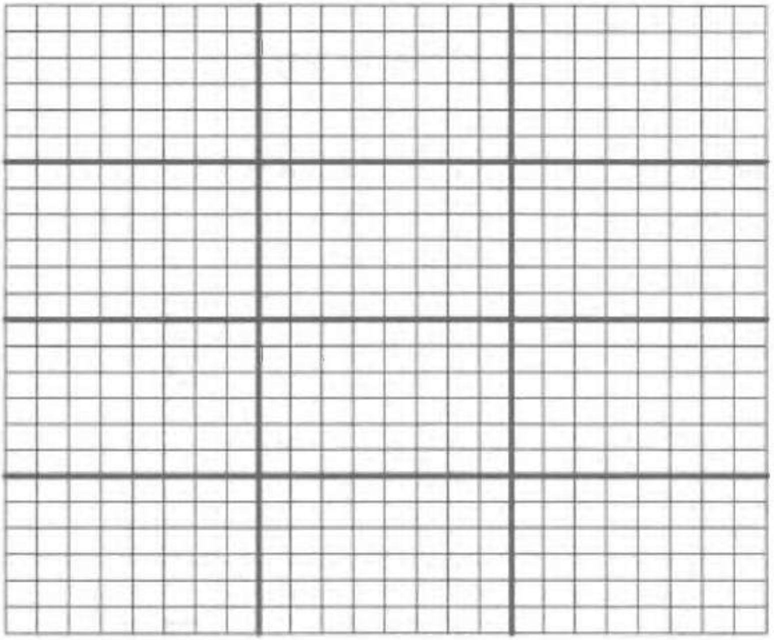
Alors:

a) $d = D(a,b)$ est la longueur du côté du plus grand carré qui pave A.

Cette propriété est triviale. Elle corespond à la définition de D(a,b)



b) $k= m(a,b)$ est la longueur du côté du plus petit carré qui est pavé par A.



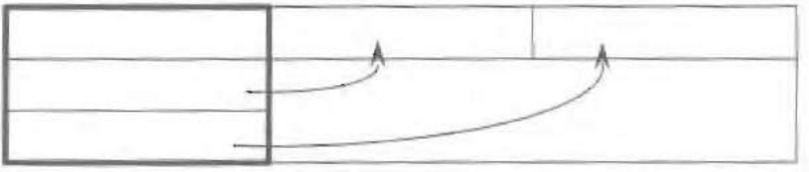
Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette assertion.
(Une démonstration se trouve en annexe).

Enfin, nous terminerons par une propriété classique.

Lemme : Si $d = D(a,b) = 1$
alors $k = m(a,b) = ab$

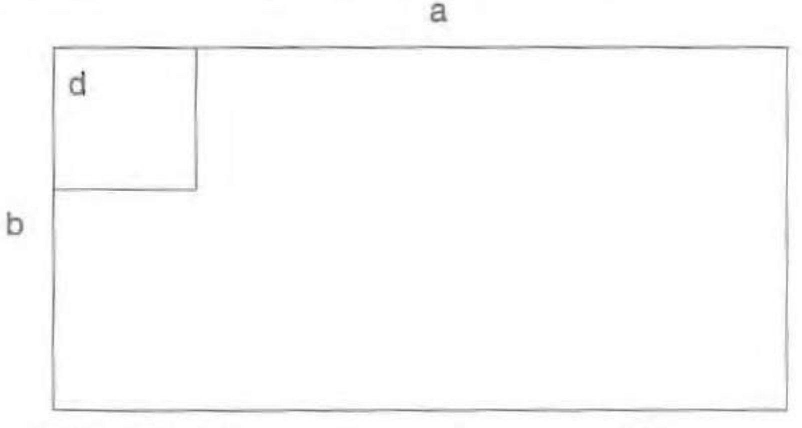
Exemple pour $a = 8$ et $b = 3$

On a $D(8,3)=1$ et $m(8,3)=8 \times 3 = 24$



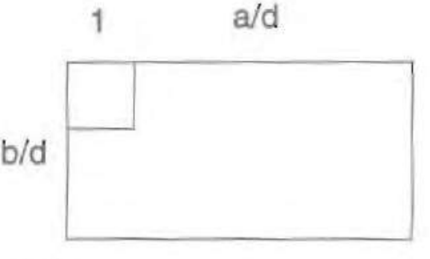
La longueur 24 est obtenue en juxtaposant 3 longueurs égales à 8.
D'une manière générale si $D(a,b) = 1$ alors la longueur $k = m(a,b)$ est égale à b fois la longueur a

Théorème : Soit un rectangle $a \times b$ et $D(a,b) = d$ et $m(a,b) = k$



Une homothétie de rapport $1/d$ tranforme a en a/d, b en b/d, d en $d/d=1$, k en k/d et fournit la situation du lemme.

Dès lors, k/d est donc égal à b/d fois la longueur a/d



d'où $k/d = (b/d)(a/d)$
ou encore $k = b(a/d)$
donc $dk = ab$

Le produit de deux nombres naturels est égal au produit de leur pgcd et de leur ppcm

Annexe: $k = m(a,b)$ est la longueur du côté du plus petit carré pavable par des rectangles $a \times b$.
Le carré de côté $k = m(a,b)$ est certainement pavable avec des rectangles $a \times b$.
Un tel pavage est, par exemple, constitué de k/b rangées de rectangles (ou de k/a colonnes de rectangles) tous placés horizontalement.

On a donc: $k= ma=nb$ avec $D(m,n)=1$ d'où $a/b = n/m$ avec **n/m fraction irréductible.**

Supposons qu'il existe un carré de côté $c < k$ pavable avec des rectangles $a \times b$ placés horizontalement ou verticalement.

Cela signifie que, dans une direction d'un côté du carré, on a : $c = ra + sb$ (1) (r,s nombres naturels) et que, dans la direction perpendiculaire, on a :
$c = ta+ ub$ (2) (t,u nombres naturels)

Si $c < k$ alors $ra + sb < ma$ donc $r < m$
Si $c < k$ alors $ta + ub < nb$ donc $u < n$
(1) - (2) donne $ra + sb - ta - ub = 0$

d'où $(r - t)a = (u - s)b$
ou $a/b=(u - s)/(r - t)$

Donc cette dernière fraction est égale à n/m, a ses termes inférieurs à ceux de Mm qui est irréductible. C'est impossible.
Dès lors le côté du plus petit carré pavable avec des rectangles a x b est bien $k = m(a,b)$.