ATELIER M07
Constructions géométriques au compas seul de la Sixième à...

Noële VIGIER

L'intitulé de cet atelier est ambitieux : parler de constructions géométriques au compas seul, à partir de la sixième ! Pourtant nous allons explorer quelques questions et utilisations possibles.

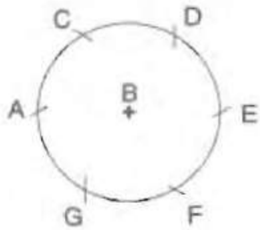
Dans ce type de construction, les points sont obtenus comme intersection de deux arcs de cercle. Aucune droite n'est tracée sur la figure, mais une droite est parfaitement déterminée dès lors que l'on connaît deux points distincts. Tout polygone est défini par ses sommets.

Au départ des constructions, il y a des points qui sont donnés : deux ou trois points selon le cas. Tous les autres sont construits. Voici quelques exemples de construction à partir de deux points.

Première construction

Soit A et B deux points dictincts; donnés. Le cercle de centre B passant par A, noté $\mathcal{C}$(B,AB) est tracé et l'on place dessus les points C, D, E, F, G tels que : AC = CD = DE = EF = FG = AB.

La figure obtenue est classique et particulièrement riche.



L'une des difficultés de la recherche de solutions en géométrie consiste à extraire des sous-figures simples d'une figure donnée. Ici, il y a abondance de configurations simples :

- segments égaux (le compas est avant tout un rapporteur de distance),
- triangles équilatéraux, - losanges, - rectangles,
- triangles rectangles, - hexagone régulier.

Dès la classe de sixième, il est possible d'habituer les élèves à rechercher ces configuration élémentaires. On peut même faire des démonstrations simples. Par exemple :

ABDC et BEDC sont des quadrilatères convexes qui ont, par construction, leurs quatre côtés égaux ; ce sont des losanges. Donc (AB), (DC) et (BE) sont parallèles, et les points A, B, E sont alignés. De même (BC) et (DE) sont parallèles. Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires donc les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires. Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre, donc

(AD) et (DE) sont perpendiculaires et le triangle ADE est rectangle en D !

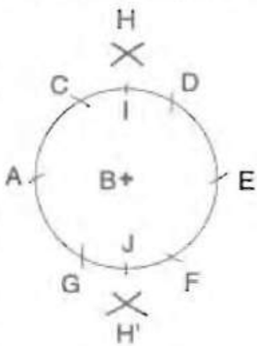
Cette démonstration, guidée, est possible très tôt au collège car elle ne nécessite que très peu de connaissances.

Si l'on choisit $(A, \overrightarrow{AB})$ comme repère de la droite (AB), le point E a pour abscisse 2 et l'on a une méthode pour construire tous les points d'abscisse x entière ($x \in \mathbb{Z}$) de la droite (AB). Trouver d'autres points de cette droite, par exemple le milieu de [AB], est un autre problème que je n'aborderai pas ici.

Deuxième construction

Toujours à partir des deux points A et B donnés, nous allons construire un carré. Si l'on reprend la figure précédente, qui est vraiment une figure de base pour ses très nombreuses propriétés, il faut pouvoir construire le milieu I de l'arc CD, c'est-à-dire un point I tel que $AI = AB\sqrt{2}$ et $BI = AB$.

Dans le triangle rectangle ADE, si l'on pose AB = 1, AE = 2 et AD = . Or, un triangle qui a pour longueurs des côtés 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ est rectangle et son hypoténuse a pour longueur $\sqrt{3}$



La médiatrice de [AE] passe par B et est axe de symétrie. De A et E comme centres, on trace les cercles de rayons AD, ils se coupent en H et H' tels que $AH = AH' = \sqrt{3}$ et $BH = BH' = \sqrt{2}$.

Alors les points I et J tels que AIEJ soit un carré sont les intersections des cercles de centres A et E et de rayon BH.

Si l'on avait voulu que le carré ait pour côté AB, il restait à contruire le point K tel que ABIK soit un carré.

De très nombreuses questions se posent à propos des constructions au compas : par exemple, construire l'intersection d'une droite et d'un cercle, de deux droites, etc..Peut-on faire au compas seul toutes les constructions possibles à la règle et au compas ? Ce court texte ne donne pas de réponse.

Ce n'est qu'une amorce de tout ce qui est possible avec un compas.

Si ce thème vous intéresse, rendez-vous aux journées de Marseille.

Bibliographie :

1-Mascheroni : *La géométrie du compas*

2 - Carrega : *Théorie des corps. La règle et le compas.*