

ATELIER M05
Motiver les élèves à la géométrie

Anne-Marie MARCHETTI
IUFM de Paris

*Picasso : « un tableau peut représenter l'idée des choses
aussi bien que leur apparence extérieure.*

Chargée de formation de professeurs des écoles, je me trouve face à des élèves très majoritairement de formation littéraire, sous-alimentés en mathématiques pendant de nombreuses années, que je dois munir d'un bagage mathématique notionnel, didactique et culturel suffisant, afin qu'ils puissent perpétuer la tradition mathématique en usage et assurer les droits minimaux en mathématiques des jeunes générations d'écoliers.

Une préoccupation essentielle de tous est la motivation à l'étude de la géométrie : "A quoi ça sert ?". Cette sempiternelle question, expression de la curiosité, de la lassitude, de l'exigence ou du doute des élèves, mérite que l'on s'y attarde. L'interrogation justifiée des élèves sur les finalités de l'étude de la géométrie appelle des réponses dans leurs immédiats, dans leurs quotidiens, et aussi dans leur avenir social, vital et culturel.

L'intérêt pour la géométrie doit être provoqué et sans cesse réactivé. Les thèmes d'étude étant répétitifs (la symétrie, par exemple, qui est heureusement étudiée de la maternelle à l'université) il s'agit de susciter et de renouveler le plaisir d'approfondir la connaissance. Voici donc quelques propositions pour convaincre des élèves de tout âge du bien-fondé de l'étude de la géométrie et entretenir la dynamique de la progression annuelle.

1 - Géométrie, produit de consommation courante

Les objets usuels, du stylo à la mobylette, du sous-marin à la fusée, de la tente à la Grande Bibliothèque Nationale requièrent pour leur **fabrication** une étude géométrique. Nous évoluons dans un monde agréable et profitons tous du travail de techniciens, architectes et ingénieurs qui utilisent quotidiennement les formes et leurs propriétés.

Une visite dans un bureau d'études, un "cabinet" d'architectes, un musée scientifique, ou quelques revues et documents techniques aident à prouver aux élèves la réalité de l'usage de la géométrie. Un contact avec le terrain leur permet d'apprécier le degré de concentration et de créativité requis par l'exercice de métiers techniques et aussi à ne pas considérer avec désinvolture

re et ingratitude les performances géométriques de leurs aînés qui exercent, grâce aux mathématiques, leur pouvoir sur le réel pour le bien-être de chacun.

2 - Géométrie et art naturel

L'observation de documents sur les formes naturelles peut amener les élèves à s'intéresser à la géométrie en tant qu'outil de connaissance de la nature.

Outre les formes de base classiques, polyèdres et mosaïques, les turbulences (tourbillon, matière stellaire), les contraintes de croissance (bois et os), les spirales (cornes, ADN, coquillages), les méandres, les explosions, les branchements (réseau fluvial, tissu pulmonaire), les arbres (tuyauterie de transport de l'eau et de la nourriture, ramifications), les bulles, les empilements et les craquelures géologiques ou botaniques sont des exemples concrets de la réalité des formes géométriques.

3 - Géométrie des «Arts et Métiers»

a) **Outil interdisciplinaire**, la géométrie, langage de la forme, est une langue véhiculaire à l'échelle planétaire et adhérente au réel. Cette langue universelle de la forme, au-delà des frontières et des opinions, dénominateur commun de la fabrication, s'exprime grâce aux nouvelles technologies.

L'ordinateur, calculatrice de la forme, et en particulier le **Cabri-Géomètre**, permet une approche expérimentale de la géométrie euclidienne. Le logiciel permet de multiplier les essais, d'aider à la conception, d'éliminer rapidement les pistes ou conjectures incorrectes. Il est un outil parmi d'autres pour maîtriser la géométrie. Demeurent, comme avec tout autre outil, les problèmes de précision des tracés et des mesures ; c'est un support expérimental préalable aux nécessaires explications et démonstrations. Cet outil libère l'utilisateur de la difficulté du dessin ; la tâche de l'élève se trouve ainsi allégée en temps ; l'impatience et le manque d'habileté manuelle ne sont plus des obstacles à la réussite en géométrie.

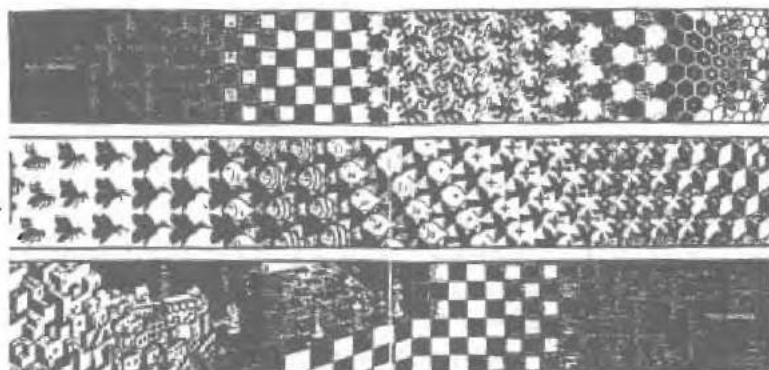
b) Arts visuels et géométrie sont alliés.

La recherche de l'harmonie, la contemplation d'œuvres éternellement belles, l'émotion esthétique inspirée par la beauté régulière, sont autant d'atouts à motiver l'étude de la géométrie.

La géométrie est un langage dont la spécificité est de s'exprimer dans deux registres, l'un de type figural, l'autre de type discursif ; en revanche, comme tout langage, le discours géométrique s'articule à un double niveau : niveau écrit et niveau oral.

L'activité qui suit a pour objet de développer le regard et la perception géométrique et aussi **la lecture, le parler et l'oral géométrique** en commençant par une "promenade en géométrie".

Je vous invite donc à flâner le long de cette œuvre d'Escher, de 1937 (n° 111), estampe de 4 mètres d'un seul tenant.



La géométrie mérite d'être parlée et le schéma de lecture géométrique proposé ici s'inspire de l'usage des plasticiens.

1 - *Les icônes* : il s'agit de repérer les éléments constitutifs du tableau. Ce sont ici le damier, la salamandre, le mot "métamorphose", etc.

2 - *La sémantique* : d'après son auteur, cette œuvre est un témoignage de son esprit joueur, de sa logique fantaisiste et de son sens de l'humour loufoque. Nous voyons dans cette métamorphose, dans ce cycle vital, une genèse de l'évolution des espèces, du monde et de la forme. De la forme minérale la plus simple à l'apparition du vivant puis de l'homme, de la vie sociale et de la pensée rationnelle symbolisée par l'échiquier, cette métamorphose va s'auto-renouveler. Cette analyse à mener avec les élèves, et à adapter à leur niveau, permet de dépasser la signification de l'œuvre pour accéder au géométrique.

3 - *Les signes plastiques* : étude rapide des contrastes, des jeux de couleurs, des oppositions de forme et de fond, des motifs, etc. Il s'agit là, en particulier, de faire progressivement abstraction de la couleur pour accéder au monde mathématique.

4 - Les signes géométrique :

Les lignes : droites, brisées puis courbes.

Les directions : horizontales, verticales puis obliques, nécessaires à la repré-

sentation de la dimension 3.

Les formes : carré, hexagone, cube, etc.

Les représentations : dimension 2 et 3.

Les transformations : translation, rotation, symétrie, homothétie.

Cette activité permet de réintroduire, revoir et utiliser le vocabulaire, les définitions et les connaissances géométriques, de mener une analyse en termes géométriques. On peut, cependant, déplorer qu'il n'y ait pas, au minimum, harmonisation du vocabulaire pédagogique mathématique et artistique, et que l'expression des objets géométriques soit bien souvent discordante entre ces deux disciplines.

Les exemples foisonnent : Vasarely, Escher, Mondrian, Delaunay, Klee, Léger, Picasso, Franck Stella, Malévitch, Noland, Dewasne, Kandinsky (composition VIII 1923 ou Schweres Rot 1924) etc.

Suite à une étude géométrique d'œuvre, il n'est pas impossible de proposer aux élèves de devenir à leur tour artistes et de terminer l'étude des propriétés, construction et agencement des formes géométriques par la réalisation d'une composition artistique collective "à la manière de...", à l'aide d'éléments réalisés soigneusement à la règle et au compas, à l'ordinateur...

Pour plaire aux philosophes, je terminerai ce paragraphe par une jolie citation de Kant : *«Une figure dessinée relève bien de l'expérience sensible, mais elle se prête également à l'expression du concept, tout universel que soit ce dernier, cette manière de voir ne considère rien d'autre que la construction du concept».*

c - Art de la répétition et transformations géométriques

Céramiques de l'Alhambra, pavages animaliers d'Escher, kilims anatoliens, papiers peints de William Morris, frises et carrelages sont des exemples d'assemblages réguliers construits par isométries à partir d'un motif de base appelé générateur.

Il existe sept types de frises ; de même, les types de pavages sont en nombre fini, il en existe exactement dix-sept, c'est-à-dire que l'on peut coponstruire dix-sept figures de pavages différents à l'aide d'un générateur donné.

Voici quelques exemples d'activités :

- *observation* des dix-sept figures et analyse des isométries utilisées (voir références),
- *fabrication* de pavages et de dessins à motifs répétitifs : les amateurs de rallyes, concours, jeux et olympiades s'y régaleront ;
- *recherche* : les élèves, répartis en groupes, ont deux feuilles de pavages. La

première, complète, contient les dix-sept pavages du plan, obtenus à l'aide d'un motif. La seconde, incomplète, ne contient que seize pavages obtenus à l'aide d'un autre motif. La consigne est de trouver et dessiner l'élément manquant de la seconde feuille, c'est-à-dire le dix-septième pavage.

Cette activité provoque l'utilisation de l'outil isométrie qui apparaît nécessaire à la résolution du problème. De plus, les élèves sont amenés à organiser leur recherche et à élaborer une stratégie de résolution. On arrive ainsi à construire un arbre de recherche : la translation est-elle utilisée ? la symétrie par rapport à une droite est-elle utilisée ? combien y a-t-il de directions de symétrie ? la rotation est-elle utilisée ? quel est l'angle de rotation ?...

4 - Géométrie et histoire

a - L'enseignement de la **représentation** et en particulier de la **perspective cavalière** peut s'agrémenter d'une information historique. Les ouvrages qui traitent de ce sujet, sans aller jusqu'au discours sur le lien entre la profondeur de l'image et la profondeur de l'existence, sont nombreux.

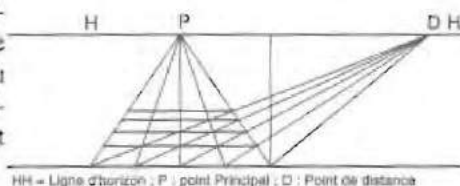
Je signale à ce propos les documents du CNDP, série Géométrie et Art, sur les représentations de l'espace : projection orthogonale, oblique, horizontale ou verticale, axonométrique, cavalière, isométrique, de Postel ou perspective curviligne.

b - Des lois de la perspective est né au XVII^e siècle un jeu d'art bien étrange, l'**anamorphose** (vient du grec "ana", qui signifie "retour vers", et de morphé "forme"). Il s'agit d'une anecdote paradoxale de la perspective et de l'optique. L'objet habituel de la perspective est de restituer la troisième dimension alors que, dans l'anamorphose, les formes se trouvent étirées ou disloquées.

L'art de l'anamorphose consiste à déformer l'image de sorte que, regardée obliquement d'un point précis et selon un angle particulier, elle apparaisse normale. C'est une lutte entre perception et raison où l'art veut se donner les statuts d'une science.

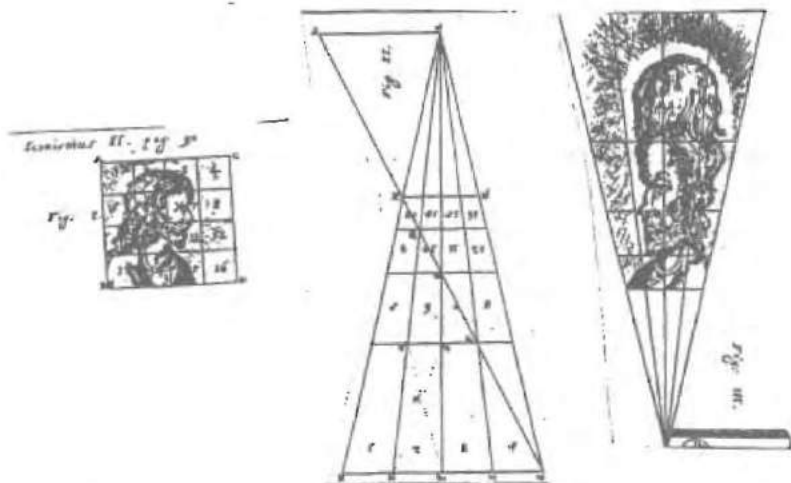
L'anamorphose rejoint le problème de l'illusion et se charge de signification avec les théories du doute, l'incertitude des apparences, l'idée de l'inconstance et de la vanité du monde.

Dans l'anamorphose ci-contre, on peut observer la transformation de la grille à maille carrée en grille à



maille trapézoïdale, moyen de l'étirement de l'objet. Observé frontalement, le visage apparaît déformé mais sa vision redevient correcte du point de distance suivant un angle précis.

Outre l'intérêt de la construction géométrique et de sa justification par le théorème de Thalès, et le plaisir amusant de créer une caricature en anamorphosant un portrait, des diapositives du CNDP "l'anamorphose" agrémentent la réflexion sur la géométrie des déformations et la lecture d'une image.



c - Il n'est pas mauvais de rappeler que l'activité humaine est une, que des gens de formations et de préoccupations différentes arrivent parallèlement à des conclusions et des réflexions analogues : un bon exemple en est la confrontation de l'évolution de la peinture et de la géométrie au XIX^e siècle analysée dans l'article de Jean-Claude Pont (*Penser les mathématiques - Point Sciences-Seuil*).

Plus récemment, on peut voir évoluer la peinture de Pietr Mondrian qui va se rapprocher des recherches de Le Corbusier sur le "Modulor", tous deux héritiers de l'emploi médiéval de la grille triangulaire des bâtisseurs de cathédrales transmuée en schémas rectangulaires abstraits. Ce type de réflexion amène bien souvent les élèves littéraires à un autre regard sur la géométrie.

d - Pour des élèves plus jeunes, tout autant qu'une phrase sur l'utilité technique du théorème de Pythagore et de Thalès, quelques mots d'**histoire des mathématiques** suffisent à rendre vivante l'étude de ces théorèmes.

5 - Géométrie du futur

Je devrais dire la géométrie du dernier jour de l'année, celle où l'imaginaire devient fantaisie, où l'on découvre les volumes multidimensionnels, les cubes axonométriques ou hyper, la géométrie sphérique ou hyperbolique, celle où le rhomboèdre rivalise avec l'icositétraèdre trapézoïdal, où le cube s'adoucit et où les polyèdres prennent des fossettes, à moins qu'ils ne se métamorphosent en stellations géométriques, de ce jour où, sans froisser la rigueur, on aperçoit les mystères de la quatrième dimension et où l'on rêve géométrie.

Dans cet esprit, dans la série "art et mathématiques", la cassette "Escher: géométrie des mondes impossibles" est un essai sur des objets représentés présentant une impossibilité géométrique dans l'espace à trois dimensions, et où il est question du rôle des mathématiques dans l'art.

Références

- 2 - *Les formes dans la nature* - P.S. Stevens - Seuil/Science ouverte
- 3 - a - *Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre* - APMEP
- 3 - b - *Le monde de M.C. Escher* - Edition du Chêne
 - *Kandinsky - Points et lignes du plan* - Folio essais
 - *L'art abstrait* - D. Vallier - Pluriel
- 3 - c - *Dossiers et matériel du PLOT* : pavages symétries, etc.
 APMEP Orléans-Tours, BP 6759, 45067 Orléans Cedex 2 (vente par correspondance)
 - *Rosaces, frises et pavages* - Y. Bossard - Cedic
 - *Mosaïques et isométries* - M.P. Coullonge, F. Tréhard - Cedic
 - *Traditional Chinese Lattice designs* - Dover Publications
 - *Mosaic Tile designs* - Dover Publications
- 4 - a - *La vision perspective* - Payot poche
 - *Instructions sur la manière de mesurer*, A. Dürer - M. Van Peene Flammarion
- 4 - b - *Des anamorphoses* - Gallimard jeunesse
 - *L'anamorphose* - 24 diapositives - CNDP
- 4 - c - *Penser les mathématiques* - Point-Seuil
 - *Tangente* n° 14, 22, 24, 6 (peintres en géométrie, Vasarely, p. Klee, M.C. Escher)
 - *Le nombre d'Or* - Que sais-je? PUF
 - *La géométrie de Pascal* - Que sais-je? PUF

Bulletin de l'APMEP n°410

- 4 - d - *Nombres et formes d'hier à demain* - AM. Marchetti
(histoire des mathématiques illustrée pour le Collège)
Edition du Choix BP 129 - 95103 Argenteuil Cedex (vente par correspondance).
- 5 - - *Polyèdres à construire et dossier polyèdres dans l'espace*
APMEP Orléans-Tours - BP 6759 - 45067 Orléans Cedex 2
- Vidéocassette : *Escher, géométrie des mondes impossibles*
série "art et mathématiques" - Imagiciel 91128 Palaiseau Cedex.