Journées Nationales d'Albi 1996
Conférence du dimanche 27 octobre

# Les niveaux de rigueur dans nos programmes : un exemple d'ensemble vide ?

André Antibi
Directeur de l'IREM de Toulouse

*Un effort certain a été fait depuis quelques années dans l'élaboration des programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire ; ils sont plus détaillés, plus précis, les compétences exigibles sont mieux mises en évidence...*

*Mais qu'en est-il dans le domaine des niveaux de rigueur ? Chaque enseignant semble livré à lui-même lorsqu'il évalue la manière de rédiger une démonstration, et ceci peut donner une mauvaise image des mathématiques aux élèves qui ont souvent l'impression que les exigences de "rigueur" peuvent parfois varier sensiblement selon les professeurs. C'est bien plus important qu'un problème classique d'évaluation car certains élèves risquent de ne plus savoir ce qui est correct et ce qui est incorrect.*

*Des résultats surprenants d'enquêtes réalisées auprès d'enseignants seront analysés. Quelques propositions concrètes susceptibles d'améliorer la situation seront suggérées.*

## 1 - Une expérience surprenante ?

### Le déroulement

En Mai 1994, à l'IREM de Toulouse, j'ai animé un stage sur la démonstration auquel ont participé 45 stagiaires, enseignants de collège et de lycée, répartis en trois groupes. Dans le premier groupe, lors de la première séance, les collègues ont bien voulu participer à l'expérience suivante :

***Première étape :*** Dans un premier temps, ils ont choisi un exercice de géométrie qu'ils considéraient comme très classique pour des élèves de niveau fin de troisième ou début de seconde.

***Deuxième étape :*** Chacun de nous a ensuite rédigé sur une feuille une solution[1] de cet exercice comme nous souhaiterions qu'un élève de ce niveau le fasse lors d'un contrôle.

***Troisième étape :*** Une photocopie de toutes les solutions fut alors distribuée à chaque membre du groupe qui, ensuite, corrigea toutes les copies (y compris la sienne donc) comme il le faisait usuellement lors d'un contrôle, l'exercice étant noté sur 5 points.

***Quatrième étape :*** Au cours d'un tour de table, chacun d'entre nous communiqua la note qu'il avait mise en justifiant les points qu'il avait «sanctionnés». Toutes les notes furent écrites dans un tableau à double entrée.

Dans les deux autres groupes, la première étape se déroula de manière différente : j'ai directement proposé l'exercice choisi par les collègues du premier groupe. Les trois autre étapes furent inchangées.

### Les résultats

Le tableau ci-dessous indique les résultats du premier groupe. Ceux des deux autres groupes sont tout-à-fait analogues.

| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 5 | 2,5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4,5 | 3 | 5 |
| (2) | 5 | 3,5 | 4,5 | 4,5 | 4,5 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 |
| (3) | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4,5 | 4 | 5 | 4 | 5 |
| (4) | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| (5) | 4 | 2,5 | 5 | 4,5 | 5 | 4 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| (6) | 5 | 4 | 3 | 5 | 3 | 5 | 4,5 | 5 | 4 | 5 |
| (7) | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4,5 | 5 | 4,5 | 4 | 5 |
| (8) | 5 | 4,5 | 4,5 | 5 | 4,5 | 5 | 4,5 | 5 | 5 | 5 |
| (9) | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4,5 | 3 | 4,5 | 4 | 5 |
| (10) | 5 | 3 | 5 | 4,5 | 5 | 4 | 3 | 4 | 5 | 5 |

1 sur laquelle nous nous étions mis d'accord d'ailleurs.

Les résultats de chacun des correcteurs sont écrits en colonne.

On peut constater sur le tableau qu'une colonne ne contient que des «5» : c'est «la mienne», la colonne n°10. Effectivement, c'est ainsi que j'aurais noté des élèves du niveau fin de troisième début de seconde. Ayant terminé le premier la correction de mes copies, je me suis d'ailleurs dit qu'il n'y aurait pratiquement que des 5 dans le tableau, que l'activité que j'avais proposée n'était pas d'un grand intérêt et j'étais déjà en train de penser au prochain sujet du stage. Vous pouvez alors comprendre mon grand étonnement, partagé d'ailleurs par tous les collègues du groupe, lorsque nous avons pris connaissance des notes !

Il convient de remarquer qu'une différence de 1 point sur un total de 5 correspond à 4 points sur 20, par exemple à la différence entre 11,75 et 15,75, c'est-à-dire entre une mention «passable» et une mention «bien», voire même «très bien» !

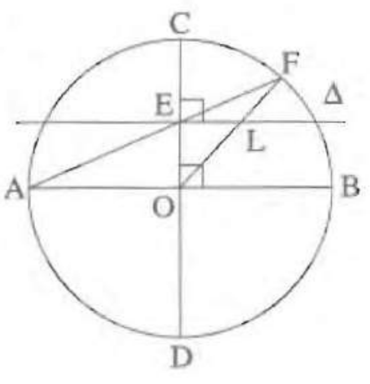
Il y a souvent un aspect humoristique dans les situations les plus sérieuses. C'est peut-être le cas ici : sur la diagonale du tableau, on pouvait s'attendre à ne trouver que des «5» puisqu'elle correspond aux notes mises par chaque professeur à sa propre copie : ce n'est pas le cas ici. En effet, entre le moment de la rédaction et celui de la correction, certains collègues se sont rendus compte que, en définitive, certaines parties de leur propre solution n'étaient pas satisfaisantes!!

**Un exemple de solution**

***Énoncé de l'exercice dont les notes figurent dans le tableau ci-dessus***

(AB) et (CD) sont deux diamètres perpendiculaires du cercle $\mathcal{C}$. La droite $\Delta$ est perpendiculaire à (CD) en E. On note F le point d'intersection de la droite (AE) et du cercle $\mathcal{C}$ et L le point d'intersection des droites $\Delta$ et (OF).

Quelle est la nature du triangle ELF?



Voici la solution que j'ai rédigée.

(EL)//(AO). Donc, d'après le théorème de Thalès dans le triangle OFA on a :

$$\frac{EL}{AO} = \frac{LF}{OF} = \frac{EF}{AF}.$$

Or $AO = OF = R$ rayon du cercle.

Donc $\frac{EL}{R} = \frac{LF}{R}$ ; D'où $EL = LF$

Le triangle LEF est donc isocèle en L.

Dans le groupe, parmi les neuf collègues qui ont corrigé ma «copie», cinq ne l'ont pas trouvée satisfaisante. Trois points ont été sanctionnés :

a) On affirme que Δ//(AB) sans justification.

b) Les théorèmes utilisés ne sont pas écrits sour forme générale.

c) On ne précise pas que le théorème de Thalès est utilisé sous la forme «Thalès triangle».

Plus précisément

| Note sur 5 | 3 | 4,5 | 4 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Points sanctionnés | (a) | (a) et (b) | (a) et (b) | (c) | (a) |

On peut constater ci-dessus

- d'une part, qu'une même «faute» est sanctionnée différemment selon le correcteur ; ceci est un problème d'évaluation classique ;
- d'autre part, que les parties sanctionnées ne sont pas les mêmes, certains collègues d'ailleurs (quatre sur neuf) n'en sanctionnant aucune. C'est ce second point, selon moi, qui est le plus préoccupant car beaucoup d'élèves risquent de ne plus savoir ce qui est correct ou incorrect et, par suite, avoir une image négative des mathématiques.

## 2 - Un inventaire de points litigieux

Dans un cadre bien plus général que celui de l'expérimentation décrite précédemment, nous alllons à présent donner un inventaire de points appréciés différemment selon les enseignants. Cet inventaire a été réalisé à

partir
- des réactions des collègues ayant participé à l'expérience décrite ci-dessus,
- des réactions de nombreux autres enseignants (300 environ) ayant participé à des stages IREM sur la démonstration, que j'anime régulièrement depuis plusieurs années,
- d'une enquête réalisée auprès d'une quinzaine d'animateurs IREM de Toulouse, Limoges et Poitiers,
- de certains résultats présentés dans ma thèse ([1]).

Cet inventaire concernant plus spécialement le collège et le lycée, n'est certainement pas exhaustif. Néanmoins, après ma conférence d'Albi, il n'a été contesté, me semble-t-il, par aucun des enseignants avec lesquels j'ai discuté de mon exposé (une trentaine, dont une vingtaine dans un atelier improvisé qui dura une heure et demie environ).

Enfin, les différentes rubriques de cet inventaire ne sont pas toujours disjointes. Il m'a semblé cependant plus clair de classer les principaux points litigieux.

**Points liés à des problèmes de logique**

***Partir de la conclusion***

Certains enseignants n'acceptent pas une solution rédigée en partant de la conclusion (voir [1] ou [2]).

***Démonstration d'une égalité A = B***

Une solution rédigée en démontrant d'abord que A = C puis que B = C n'est souvent pas acceptée. On demande de partir d'un membre de l'égalité, le plus souvent d'ailleurs du membre de gauche, et «d'aller rigoureusement jusqu'à l'autre membre».

***Utilisation du «CAR»***

L'utilisation du mot «CAR» n'est parfois pas acceptée, surtout au collège (certains enseignants exigent que dans une démonstration une cause précède une propriété qui en découle).

***Rédaction selon un modèle rigide***

arbres ; utilisation de «on a», «on sait que», «donc»…

***Connecteurs logiques, «si et seulement si», quantificateurs***

Peut-on ou doit-on les utiliser ?

**Points liés à un problème de convention**

***Ecriture détaillée systématique***

Doit-on écrire systématiquement :
- l'énoncé, sous forme générale, de chaque théorème utilisé ;

- les hypothèses et la conclusion ?
- le résultat d'un calcul sous forme d'une phrase ?

***Tableau de variations, tableau de valeurs***

- Un tableau de variations doit-il contenir exclusivement des résultats déjà établis, même s'ils sont très simples (valeur d'une fonction en un point par exemple)?
- Dans le cas d'une fonction paire ou impaire, définie sur $\mathbb{R}$ par exemple, peut-on se contenter de faire le tableau de variations sur $[0, +\infty]$ ?
- Avant la construction d'une courbe, un tableau de valeurs est-il indispensable ? La lecture graphique des coordonnées d'un point, clairement indiquées sur le dessin, n'est-elle pas suffisante ?

***Problèmes d'unités***

- Des écritures telles que : «$3\ \text{cm} \times 5\ \text{cm} = 15\ \text{cm}^2$ , ou $15\ \text{km/h} \times 2\ \text{h} = 30\ \text{km}$ sont-elles autorisées ?
- Lors du calcul d'une aire A, lorsqu'aucune unité n'est précisée, peut-on donner une réponse sous la forme $A = 5$ ou doit-on nécessairement écrire : $A = 5$ unités d'aire ?

***f et f(x)***

- f désignant une fonction, doit-on soigneusement différencier f et f(x) ? Une écriture telle que $(x^2)' = 2x$ est-elle autorisée ?
- Lors de l'étude, à l'aide du théorème des fonctions composées, de la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$, doit-on nécessairement préciser les deux fonctions ? Une solution telle que «$x = 1 + x^2$, $\lim\limits_{+\infty} (1 + x^2) = +\infty$ , $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , donc $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{1 + x^2} = +\infty$» est-elle autorisée ?

***Utilisation de symboles dans lun texte***

Peut-on écrire des phrases du type «Montrons que d//d'» ? ou «Puisque d⊥d', alors...» ?

***Exigence de rigueur***

Peut-on écrire : «$x = 5/2 = 2{,}5$» ? ou doit-on écrire : «$x = 5/2$, $5/2 = 2{,}5$, donc $x = 2{,}5$» ?

***Nécessité d'une démonstration par récurrence***

Pour calculer le terme $u_n$ d'une suite arithmétique, peut-on ajouter membre à membre n égalités :

$u_1 = u_0 + r$

$u_2 = u_1 + r$ donc $u_n = u_0 + nr$.

...............

$u_n = u_{n-1} + r$

Une démonstration par récurrence est-elle nécessaire ?

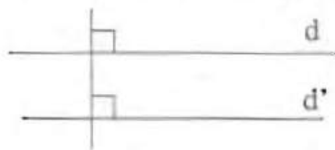
**Justification non explicitée**

***Résolution d'équations ou d'inéquations classiques***

- Pour résoudre l'équation «$x + 4 = 2$», doit-on appliquer directement la règle de transposition, ou doit-on la justifier en disant «ajoutons – 4 aux deux membres» ?
- Lorqu'on écrit «2x o 6 donc x o 3» doit-on préciser «car $2 > 0$» ?
- Lorsqu'on écrit ln x o ln 2 donc x o 2», doit-on justifier ?
- Lors de la résolution de l'équation $(x - 1)(x + 3) = 0$, doit-on préciser «un produit AB est nul si et seulement si...» ?
- Peut-on écrire «pour comparer $\sqrt{x^2 + 1}$ et $\sqrt{x^2 + x + 1}$, comparons leurs carrés» sans préciser que $\sqrt{x^2 + 1}$ et $\sqrt{x^2 + x + 1}$ sont positifs ?

***Utilisation d'une figure clé***

En présence de la figure ci-contre, peut-on écrire «d//d'» sans dire «car d et d' sont perpendiculaires à une même droite» ?




***Exigence d'une justification demandée explicitement***

- Lorsque l'on répond à une question telle que «Calculer la dérivée de la fonction f : x a $x^3 - 2x + 1$», doit-on préciser pourquoi la fonction f est dérivable ?
- Lorsque l'on répond à la question : «Calculer $\int_0^1 (x^3 - 2x + 1)\, dx$, doit-on préciser pourquoi l'intégrale existe ?

***Formulation imprécise***

- Lorsque l'on parle d'un triangle rectangle, ou isocèle, doit-on préciser en quel point ?
- Lors de l'utilisation du théorème de Thalès, doit-on préciser de quelle forme du théorème il s'agit ?
- Doit -on accepter, dans certains cas, l'absence d'une justification trop

compliquée .

Par exemple, lorsqu'on demande en Terminale : «Trouver a et b tels que $\frac{x+1}{x+2} = a + \frac{b}{x+2}$», peut-on utiliser le théorème d'identification de deux polynômes, même si, ici, les deux polynômes qui interviennent ne sont pas égaux pour tout réel x, mais seulement pour $x \neq -2$ ?

**Equations, inéquations, Systèmes, Lieux géométriques** [2]

***Quel type de rédaction accepte-t-on ?***

Par exemple, lors de la résolution d'une équation, d'un système, doit-on exiger l'écriture d'un connecteur logique entre les différentes étapes de la solution ?

***Doit-on privilégier une méthode de résolution ?***

(Raisonnement par équivalence, par analyse-synthèse,...)

***Quelle importance doit-on accorder à la réciproque ?***

***Problèmes liés à l'ensemble de définition :***

Par exemple, doit-il être indiqué dans l'énoncé ? Lorsqu'il ne l'est pas, doit-on systématiquement commencer par le déterminer ?

**Utilisation du graphique**

Les problèmes liés à l'utilisation du graphique en Mathématiques font l'objet d'un article qui doit paraître dans le prochain *Bulletin* de l'APMEP [4]. En général, lors de la résolution d'un problème, le graphique est mal accepté, surtout en analyse. Un des points les plus importants qu'il conviendrait de préciser est le suivant : *Dans quel cas le graphique peut-il être accepté comme outil de validation ?* Plus précisément, quand peut-on accepter un raisonnement du type *«ça se voit sur le dessin, donc c'est vrai»*.

Une enquête que j'ai effectuée sur ce point fait apparaître certaines contradictions chez les enseignants convaincus de ne jamais utiliser un raisonnement de ce type. Voici par exemple deux propriétés admises uniquement *«car ça se voit sur le dessin»* :

- Dans un triangle, deux médianes se coupent.
- Le segment [AB] joignant un point A intérieur à un cercle à un point B extérieur à ce cercle, coupe ce cercle.

2 On peut remarquer qu'il s'agit dans les quatre cas de problèmes où l'on demande de déterminer tous les éléments d'un ensemble E ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$, ensemble des points du plan ou de l'espace,...) satisfaisant à une certaine propriété. Une étude des problèmes de ce type est proposée dans l'article *«Mathématiques et prestidigitation»* [3].

Il en est de même lors de la résolution d'un système d'inéquations.

## 3 - Quelques propositions

Actuellement, chaque enseignant, livré à lui-même, a dû élaborer ses propres règles d'exigence, en s'appuyant essentiellement sur sa conception personnelle de l'enseignement des mathématiques. Il serait donc anormal et stérile d'aborder cette question délicate en prétendant que certains ont raison, que d'autres ont tort… il me semble au contrairement nettement préférable de dire clairement au départ que TOUT LE MONDE A RAISON. Il convient simplement d'insister sur le fait que ce qui est très préjudiciable pour notre enseignement, c'est surtout la diversité des points de vue, et non pas le choix d'une règle plutôt qu'une autre. En effet, certains élèves risquent d'avoir une vision des mathématiques déformée et désagréable, chaque professeur lui imposant des règles différentes.

L'inventaire de points litigieux présenté précédemment montre qu'ils sont peu nombreux. Rappelons de plus que cet inventaire concerne tous les niveaux d'enseignement. Ainsi, contrairement peut-être à ce que l'on pourrait penser, il est tout à fait possible d'améliorer la situation en proposant dans les programmes des indications concernant ces différents points litigieux.

Un point me paraît important : il convient, pour chaque niveau, de bien indiquer les arguments pédagogiques ayant conduit à tel ou tel choix. Il serait en effet regrettable d'imposer aux enseignants de changer leurs habitudes dans ce domaine sans leur dire pourquoi ! Si une commission était chargée de cette étude, elle pourrait même impliquer un plus grand nombre d'enseignants, en suscitant une large réflexion sur ce sujet.

Pour ma part, il me semble que l'on devrait privilégier l'imagination, l'intuition, l'esprit de recherche plutôt qu'un formalisme excessif et souvent inutile.

La liberté de l'enseignement serait-elle remise en cause ? Je ne le pense pas. D'ailleurs, lorsqu'à la fin de mes conférences sur ce thème, je demande aux enseignants s'ils souhaitent avoir des «consignes» dans ce domaine, ils répondent «OUI», très souvent unanimement d'ailleurs. Ainsi, il apparaît clairement que les enseignants préfèreraient se concentrer sur la vraie activité mathématique, et être libérés des questions de pur formalisme. Quant aux Inspecteurs et au Animateurs de stages, souvent sollicités par de nombreuses questions dans ce domaine, ils pourraient eux aussi se consacrer à des activités plus riches.

Ce problème est-il spécifique aux mathématiques ? Je ne le pense pas.

Mais il me semble qu'en Mathématiques, la situation pourrait être facilement améliorée, et qu'il serait donc très regrettable de ne pas le faire. ainsi, débarassés de ces «tracasseries», nous pourrions mieux nous consacrer aux mathématiques.

## Bibliographie

[1] A. ANTIBI, Thèse d'Etat, Mention Didactique des Mathématiques (1988), *«Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions»*

[2] A. ANTIBI, *«Une méthode de démonstration consistant à partir de la conclusion»*, *Bulletin* APMEP (Avril 1991).

[3] A. ANTIBI, *«Mathématiques et Prestidigitation»*, *Bulletin* APMEP n° 339 (1983).

[4] A.ANTIBI, *«Graphique, démonstration et rigueur : quelques réflexions»* *Bulletin* APMEP (Juillet 1997).