

Journées Nationales d'Albi 1996  
Conférence samedi 26 octobre

# La météotologie

## Quelques problèmes mathématiques posés par ses applications

Jean PAILLEUX

METEO-FRANCE

Centre National de Recherches  
Météorologiques

### 1. Comportement de l'Atmosphère : les lois qui la gouvernent et les phénomènes qui s'y déroulent

L'atmosphère est un mélange gazeux composé d'azote N<sub>2</sub> (78%), d'oxygène O<sub>2</sub> (21%), de quelques autres gaz tels que argon, gaz carbonique ou ozone (faibles en concentration mais dont le rôle est capital pour certains processus physico-chimiques), et enfin d'eau existant non seulement à l'état de vapeur mis aussi sous forme liquide et solide (nuages d'eau et de glace). En moyenne la masse de l'atmosphère correspond à une pression de l'ordre de 1 000 hPa près du niveau de la mer.

Lorsque l'on s'élève à partir du sol jusque vers 10 km d'altitude (c'est-à-dire dans la **troposphère**), la pression atmosphérique décroît jusque vers 250 hPa et la température décroît aussi jusque vers -50 à -60°C. La température cesse alors brutalement de décroître (**tropopause**) puis commence à s'éle-

ver dans la **stratosphère** et la **mésosphère**, avant de s'abaisser à nouveau pour atteindre un nouveau minimum vers 80 km d'altitude (**mésopause**). Au-dessus de la mésopause on trouve la **thermosphère** et l'**exosphère**. Plus de détails sur la description physique de l'atmosphère peuvent se trouver dans Triplet et Roche (1971). En moyenne la pression est de 10 hPa vers 30 km d'altitude (dans la stratosphère) c'est-à-dire que 99% de la masse atmosphérique se trouve au-dessous de 30 km. Les modèles actuels de prévision numérique du temps s'intéressent à ces 30 premiers kilomètres, donc négligent l'influence du 1% de masse restant au-dessus.

La tropopause correspond non seulement à une rupture brutale du gradient vertical de température, mais aussi au niveau au-dessous duquel se trouvent la plupart des nuages.

Outre la pression  $p$ , la température  $T$  et la concentration en différents constituants, une variable capitale pour le météorologiste est le vent (vecteur  $\vec{V}$ ). L'ensemble de ces paramètres obéit aux équations de la météorologie :

- **Equation du mouvement**

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \vec{F}$$

$\vec{\Omega}$  est le vecteur rotation terrestre,  $\rho$  la densité de l'air,  $\vec{g}$  le vecteur gravité terrestre et  $\vec{F}$  la force de frottement par unité de masse.

- **Equation de continuité**

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div}(\vec{V})$$

- **Equation de la thermodynamique**

$$C_p \frac{dT}{dt} = \frac{RT}{p} \cdot \frac{dp}{dt} + Q$$

$C_p$  est la chaleur massique de l'air à pression constante,  $R$  la constante des gaz parfaits,  $Q$  les apports de chaleur à la particule d'air considérée.

- **Loi des gaz parfaits**

$$p = \rho RT$$

Ces quatre équations constituent le système de Navier-Stokes, système aux dérivées partielles à la base de la modélisation numérique en météorologie, traitant le comportement de l'air sec. En prévision numérique, on y ajout

te au moins l'équation de bilan de vapeur d'eau traitant l'humidité spécifique  $q$  (c'est-à-dire la concentration en vapeur d'eau). Pour d'autres applications telles que la modélisation climatique, on rajoute aussi l'équation de bilan d'autres constituants.

Une analyse de l'équation du mouvement montre qu'à grande échelle **l'atmosphère est très proche de l'équilibre hydrostatique** :

$$dp = -\rho g dz = -d\phi$$

( $\phi = gz$  est le géopotential).

En fait l'hypothèse hydrostatique est utilisée dans la plupart des modèles de prévision numérique actuellement opérationnels. On parle alors de modèles à équations primitives. Ce n'est que lorsqu'on étudie des phénomènes dont l'échelle horizontale descend en dessous d'une dizaine de kilomètres que l'on commence à relâcher l'hypothèse hydrostatique.

A grande échelle le moteur de l'atmosphère est le rayonnement solaire qui chauffe un peu l'atmosphère, mais surtout le sol. Il procure des apports de chaleur beaucoup plus importants près de l'équateur que du pôle, engendrant des mouvements ascendants près de l'équateur, puis une circulation méridienne de l'équateur vers les pôles avec une zone de subsidence vers 30° de latitude. Ceci correspond à la **cellule de Hadley**. Les autres éléments clés de la circulation générale sont :

- La prédominance des vents d'Est en surface convergeant près de l'équateur (**alizés - zone de convergence intertropicale**) ; à noter que cette zone de convergence est associée à l'équateur thermique plutôt que géographique, qui est variable en fonction du mouvement apparent du soleil à l'intérieur de la zone intertropicale (et donc de la saison) ;
- La **prédominance des vents d'Ouest** aux latitudes moyennes, les vents les plus forts de la troposphère se situant au voisinage de la tropopause.

Outre l'équilibre hydrostatique déjà évoqué, l'équation du mouvement montre que dès que l'on est suffisamment loin de l'équateur, il y a en première approximation équilibre entre la force de pression et la force de Coriolis (composantes horizontales). C'est l'équilibre géostrophique vérifié avec une assez bonne précision pour tous les systèmes d'échelle assez grandes aux latitudes moyennes et élevées. Cette hypothèse permet de relier directement le vent au gradient horizontal de géopotential (ou de pression) :

$$u = -\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} ; v = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

et permet ainsi de décrire les mouvements de l'atmosphère au moyen de cartes de géopotential à différents niveaux de pression.

Les grands courants de la circulation générale sont affectés d'ondulations de plus ou moins grande échelle, ayant une durée de vie de quelques jours, et jouant un rôle capital sur les éléments concrets du temps. La prévision météorologique s'attache à observer, décrire et prévoir à quelques jours d'échéance ces phénomènes :

- ce sont les **perturbations des latitudes moyennes** auxquelles sont associés les systèmes frontaux et les dépressions en surface ; la circulation générale fait que ces perturbations se déplacent plutôt d'Ouest en Est en moyenne ;
- ce sont les **cyclones tropicaux** près de l'équateur, qui se forment sur les océans chauds, se creusent très fortement en donnant des vents et des pluies violents ; leur direction privilégiée de déplacement est Est-Ouest.

Bien analyser et prévoir les tempêtes tropicales et extratropicales exige de pouvoir observer beaucoup de détails de la structure thermodynamique de l'atmosphère, ce qui implique pour le météorologiste d'essayer de tirer le maximum des réseaux d'observation de l'atmosphère.

## **2. Météo-France : la service météorologique français intégré dans une organisation mondiale .**

En 1854, une violente tempête causa la perte de plusieurs navires français en Mer Noire pendant- là guerre de Crimée. L'astronome français Leverrier fut alors chargé d'étudier ce phénomène météorologique, de voir s'il était prévisible, et si la catastrophe aurait pu être évitée. Son étude montra que la tempête aurait pu être suivie pendant trois jours lors de son déplacement à travers toute l'Europe, et qu'un réseau d'observations météorologiques aurait permis sans doute d'éviter le désastre. Ce fut le début de la météorologie moderne en général, et de la notion de réseau d'observations organisé en particulier. Pour plus de détails historiques, voir Chaboud (1993). De nos jours, un siècle et demi plus tard, l'observation de l'atmosphère est organisée en étroite collaboration entre les différents pays : collaboration internationale gérée par l'**Organisation Météorologique Mondiale (OMM)**. Les principaux systèmes d'observations sont actuellement les suivants :

- **Observations météorologiques en surface** : ce sont les stations météorologiques ordinaires sur terre (environ 2 000 sur tout le globe dont plus d'une, centaine exploitées par Météo-France sur territoire français) ; sur mer, le même type de station est embarqué sur environ un millier de navires marchands. Enfin plusieurs services météorologiques déploient régulièrement des bouées dérivantes sur mer, bouées qui observent et transmettent automatiquement plusieurs paramètres.
- **Observations météorologiques en altitude**, faites in situ : ce sont les

mesures obtenues par ballon-sondes ou par avion. Deux fois par jour en général (0 et 12h GMT), dans près de 1 000 stations de radiosondage sur le globe (dont 7 en France métropolitaine), des sondes emportées par un ballon mesurent les principaux paramètres météorologiques jusqu'à 20 ou 30 km d'altitude. En outre, un nombre croissant d'avions de ligne transmettent au sol, en temps réel, des observations de vent et température, souvent par des systèmes entièrement automatisés.

- **Observations par satellites** : il existe deux types de satellites météorologiques, les satellites géostationnaires et les satellites défilants. Les premiers apportent surtout de l'information sur le vent dans les tropiques, les seconds sur le profil vertical de température et d'humidité dans l'atmosphère. Tous permettent d'observer les nuages et leur évolution. Plusieurs instruments font l'objet de recherches et de développements destinées à améliorer l'observation météorologique par satellite dans le futur.

Un rôle primordial de Météo-France (et de ses homologues à l'étranger) est **l'exploitation et la maintenance de l'ensemble des réseaux d'observations précités**. Dans le cas de certains satellites météorologiques (comme le satellite européen Météosat), l'exploitation est partagée entre différents pays. Un autre rôle important des services météorologiques nationaux tels que Météo-France est **l'échange rapide** (en temps réel, pour répondre aux besoins de beaucoup d'activités opérationnelles) d'un sous-ensemble important de ces observations sur tout le globe). Citons, parmi les autres activités de Météo-France:

- **Toutes les activités de surveillance de l'environnement et du climat** : surveillance des phénomènes météorologiques dangereux pour la sécurité des biens et des personnes ; surveillance de phénomènes liés à la pollution ; suivi de la climatologie locale par archivage et traitement de longues séries d'observations en certaines stations.
- **L'ensemble des activités de recherche sur les phénomènes atmosphériques** décrits en section 1, depuis les plus fondamentales (mécanismes chimiques d'évolution de la couche d'ozone par exemple) jusqu'aux plus appliquées (mise au point de nouveaux instruments permettant d'effectuer des observations plus précises ou moins chères). Citons aussi la modélisation climatique, s'appuyant sur les équations décrites en section 1, comme les modèles de prévision numérique.
- **La prévision du temps**, qui est sans doute l'activité la plus connue du grand public, et qui recoupe d'ailleurs d'autres activités mentionnées ci-dessus. Cette activité est décrite plus en détails dans la section suivante.

### 3. La prévision du temps et les outils mathématiques qu'elle implique

Depuis une trentaine d'années la prévision du temps s'appuie sur des modèles numériques qui consistent à intégrer le jeu d'équations de Navier-Stokes auquel on adjoint généralement l'hypothèse hydrostatique (v. section 1). Ces équations aux dérivées partielles ne pouvant s'intégrer analytiquement, on utilise des techniques d'analyse numérique pour effectuer une intégration approchée sur quelques jours à partir d'un état initial qui est la description la meilleure possible des paramètres atmosphériques un jour donné à un instant donné (en pratique 0 ou 12h GMT, généralement).

Le domaine terrestre d'intégration peut être soit tout le globe (modèle global), soit une partie entourant le pays sur lequel on veut faire la prévision. Ainsi, Météo-France utilise pour la prévision numérique du temps un modèle global à mille variable nommé "ARPEGE", et un modèle à domaine limité et maille fine, "ALADIN", couvrant la France et les pays environnants. Le 1er est utilisé pour fournir des prévisions jusqu'à 3 jours d'échéance, le 2ème jusqu'à 2 jours. Pour faire ses prévisions, Météo-France s'appuie aussi sur un modèle numérique européen, intégré quotidiennement jusqu'à 10 jours. Pour une échéance plus lointaine, la prévision numérique n'apporte aucune information utile pour la prévision du temps, étant données les incertitudes sur l'état initial et les approximations numériques et physiques faites dans l'intégration du modèle.

Tout modèle numérique de prévision du temps nécessite entre autres les opérations que nous détaillons maintenant.

- **Représentation des paramètres météorologiques** ( $\vec{V}$ ,  $T$ , ...) sur le domaine d'intégration. Ceci se fait au moyen d'une grille régulière (discrétisation spatiale des champs météorologiques). Ceci se fait parfois aussi en décomposant les champs météorologiques en série de fonctions. Ainsi dans beaucoup de modèles globaux comme le modèle français ARPEGE, on utilise comme base de fonctions des harmoniques sphériques, fonctions à 2 indices  $n$  et  $m$  (nombres d'ondes), qui ont la propriété d'être fonctions propres de l'opérateur laplacien en géométrie sphérique. Ces harmoniques sphériques s'écrivent :

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = P_n^m(\sin \theta) e^{i m \varphi}$$

$\theta$  étant la latitude,  $\varphi$  la longitude. Les  $P$  sont les fonctions de Legendre, et l'exponentielle correspond à une décomposition de Fourier.

- **Discrétisation des équations du modèle**, en faisant intervenir en particu

lier un pas de temps  $\Delta t$ , et en remplaçant les dérivées temporelles par des différences finies dans le temps (techniques d'analyse numérique).

- **Détermination de l'état initial de l'atmosphère.** Cette opération est appelée "analyse objective" ou "assimilation de données" en Météorologie. Elle consiste à reconstituer l'état de toutes les variables atmosphériques pertinentes dans la représentation choisie (sur une grille régulière, ou dans une base de fonctions), à partir des observations disponibles. Ces observations ne donnent qu'une information partielle sur l'état de l'atmosphère car non seulement elles sont affectées d'incertitudes de mesures, mais de nombreuses parties de l'atmosphère ne sont couvertes par aucun système d'observations. Outre les observations, on peut utiliser dans cette opération toute information annexe sur l'état de l'atmosphère, en particulier celle contenue dans les équations elles-mêmes. On a donc à traiter un **"problème inverse"** classique : reconstruire au mieux l'information du système atmosphérique à partir d'une connaissance ou d'une observation partielle de ce système. Toutes les méthodes d'assimilation de données font appel à des notions statistiques, chaque source d'information étant pondérée par ses statistiques d'erreur associées : moyenne, variance et covariance d'erreurs d'observation, d'erreurs de prévision, etc... Actuellement, les schémas d'assimilation les plus modernes tendent à devenir **"variationnels"**, c'est-à-dire à faire appel aux techniques du contrôle optimal. En effet  $X$  étant un vecteur constitué par l'ensemble des variables atmosphériques nécessaires pour initialiser un modèle à un instant donné, l'assimilation consiste à trouver l'état  $X$  qui minimise une certaine fonction  $J(X)$ . Typiquement,  $X$  est constitué de plusieurs millions de valeurs de température, composantes du vent, pression,... et  $J(X)$  est l'expression mathématique de la distance d'un état atmosphérique  $X$  à l'ensemble des informations disponibles sur cet état (par exemple l'ensemble des observations de l'atmosphère sur un intervalle de temps). On est donc amené à trouver le vecteur  $X$  qui minimise  $J(X)$ , dans un espace dont la dimension est de l'ordre du million. C'est un problème de minimisation classique en contrôle optimal, mais de dimension très grande. Pour réaliser en pratique cette minimisation, la notion d'opérateur adjoint (qui permet de calculer le gradient de  $J$  par rapport à  $X$ ) s'est avérée décisive.

#### 4. Conclusion : les mathématiques en météorologie

Le chercheur météorologiste est amené à utiliser dans ses activités une large gamme d'outils mathématiques. Depuis que l'ordinateur est utilisé quotidiennement en Météorologie (aussi bien en recherche qu'en exploitation quotidienne pour la prévision numérique du temps), c'est la modélisation

atmosphérique qui fait de plus en plus appel à des outils mathématiques variés. Le chercheur océanographe, qui a lui aussi à modéliser un fluide obéissant aux lois de Navier-Stokes est dans une situation analogue.

Dans ce contexte de modélisation, une familiarité avec les notions mathématiques suivantes est indispensable:

- **Notion, d'algèbre linéaire** : l'écriture d'opérateurs sous forme matricielle est très courante ; savoir jongler avec les propriétés des matrices est souvent capital pour optimiser un algorithme de calcul. De plus les statistiques interviennent partout en Météorologie, et le maniement des statistiques fait largement appel à l'algèbre linéaire.
- **Notions d'analyse vectorielle** : comme dans tout problème de mécanique des fluides, les notions de gradient, rotationnel, divergence, etc., sont très importantes, d'autant plus qu'en Météorologie on opère plutôt en géométrie sphérique qu'en géométrie plane.
- **Notions d'analyse topologique**, en particulier pour mettre en œuvre les algorithmes variationnels d'assimilation de données.

Signalons enfin que la mise en œuvre de modèles numériques pour la prévision du temps demande d'énormes ressources calcul, et donc des calculateurs de haut de gamme. En effet, on a vu qu'il s'agissait de calculer des millions de paramètres météorologiques, par pas de temps de quelques minutes, jusqu'à quelques jours d'échéance, et dans un délai suffisamment bref pour que le résultat du calcul puisse être utilisé par le prévisionniste.

Dans ce contexte, il arrive souvent qu'une avancée soit obtenue par la mise en œuvre d'outils mathématiques nouveaux en météorologie. Ainsi, sans la notion d'opérateur adjoint, le problème de contrôle optimal de l'assimilation variationnelle n'aurait pu être résolu en pratique.

## RÉFÉRENCES

Triplet J-P. et G. Roche, 1971: *Météorologie Générale*. Ecole Nationale de la Météorologie, Toulouse.

Chaboud R., 1993 : *La Météo : questions de temps*. Editions Nathan, Paris.