

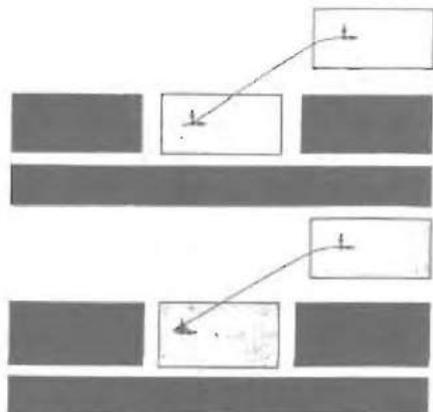
De la complexité d'un créneau

J.-P. Laumond
LAAS/CNRS

7 avenue du Colonel Roche - 31077 Toulouse

La figure 1 illustre une situation fortement répandue dans la conduite d'une voiture en milieu urbain : le créneau. Dans le premier cas, le conducteur parvient à se garer en effectuant une seule manoeuvre (correspondant au point de rebroussement sur la trajectoire). Dans le deuxième cas, le véhicule stationnant à droite est très légèrement plus long; l'espace de stationnement se trouve ainsi réduit; il ne faut pas moins de cinq manoeuvres pour effectuer le créneau.

Figure 1 : Plus l'espace libre entre les pare-chocs se réduit, plus le créneau nécessite de manoeuvres. Les trajectoires présentées ici ont été calculées à partir d'un logiciel développé au LAAS/CNRS par P. Jacobs (maintenant à Qualcomm Inc. San Diego), M. Taix et T. Siméon.



Comment varie le nombre de manoeuvres nécessaires à l'exécution d'un créneau en fonction de la place disponible ?

La réponse à cette question constitue un des résultats récents des travaux en algorithmique de la planification de mouvements, thème central de la recherche en Robotique. Elle permet d'illustrer le caractère fortement interdisciplinaire des travaux : la question est de nature calculatoire et classique en algorithmique (trouver une borne inférieure de complexité); la réponse fait appel à des éléments de la théorie de la commande et de la géométrie différentielle.

Une voiture est un système non holonome

Dans un premier temps nous allons tenter de comprendre pourquoi la situation du créneau est générique de la difficulté de conduire un véhicule et pourquoi elle apparaît comme un test de la maîtrise du jeune conducteur.

Trois paramètres sont nécessaires pour décrire la position d'une voiture : deux paramètres réels x et y pour la position et un paramètre angulaire θ pour l'orientation. La figure 2 illustre cette paramétrisation. L'espace de tous ces paramètres constitue l'espace des configurations du véhicule, la variété $R^2.S^1$ de dimension 3.

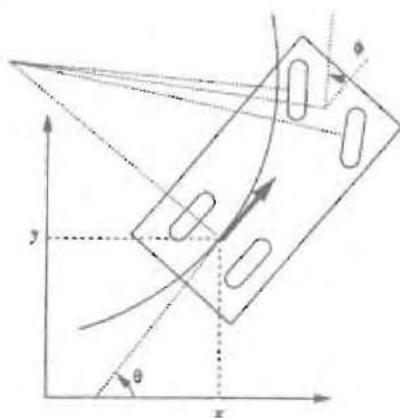


figure 2
modélisation d'une voiture

Si l'on se place de son point de vue, le conducteur ne dispose que de deux types de commandes : l'accélérateur et le frein agissent sur la vitesse du véhicule, tandis que le volant permet de contrôler sa direction. De plus le rayon de braquage du véhicule est minoré. En simplifiant le modèle à l'extrême, on peut considérer que toute action élémentaire du conducteur conduit à

l'exécution d'une trajectoire qui réalise une combinaison de deux mouvements élémentaires: aller en ligne droite et tourner au maximum. En terme de commande, ce modèle correspond au système suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} v_2$$

où v_1 et v_2 correspondent respectivement aux deux fonctions élémentaires de commandes de la vitesse et de la direction. Si $v_2 = 0$ le véhicule va en ligne droite. Si $v_1 = 0$ le véhicule décrit un arc de cercle de rayon 1 (qu'on supposera être le rayon de braquage minimum).

Il n'est pas possible pour le conducteur de conduire directement son véhicule dans une direction parallèle à l'axe de l'essieu arrière. Le système évolue dans une variété de dimension 3, alors qu'il n'est commandé que par deux fonctions élémentaires; il est dit non holonome.

Conduire une voiture

En dépit de ce handicap, l'expérience montre tous les jours que nous sommes capables, quitte à manœuvrer, d'amener notre véhicule là où nous le souhaitons. C'est ce que nous allons maintenant prouver formellement. L'intérêt de cette preuve réside plus dans son utilisation ultérieure que dans la redécouverte d'un résultat connu de tout un chacun.

Nous allons montrer que si le conducteur est capable d'amener son véhicule "proche" d'un but, il lui est possible de l'amener "exactement" au but sans faire de détours inutiles.

Considérons que le but à atteindre est le point de coordonnées $(0,0,0)$ de $\mathbb{R}^2.S^1$ (figure 3) en partant d'un point quelconque $c = (x, y, \theta)$ situé dans

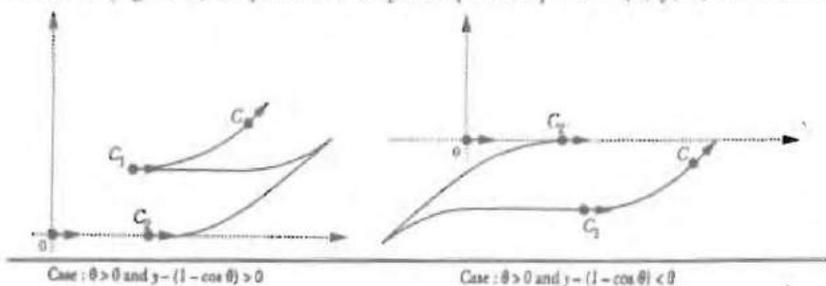


Figure 3 : deux manières d'atteindre le point $(0, 0, 0)$

un voisinage du but. Nous appuyons notre construction sur la figure de gauche (une construction analogue est illustrée sur la figure de droite). Le mouvement se décompose en trois étapes.

On commence par faire décrire au véhicule un arc de cercle de rayon l en marche arrière jusqu'à l'amener à une orientation nulle ($\theta = 0$). Le point atteint à l'issue de ce mouvement est le point $c_1 = (x_1, y_1, \theta_1) = (x - \sin\theta, y - (1 - \cos\theta), 0)$. La longueur du chemin correspondant est $l|\theta|$.

Dans un deuxième temps, on manœuvre; plus précisément on exécute un mouvement composé de quatre éléments de même longueur T , consistant en un segment de droite et un arc de cercle de rayon l en marche avant, suivi par la même séquence effectuée en marche arrière. A l'issue de ce mouvement, le véhicule retrouve son orientation initiale, mais il a évolué en position. Si on considère une valeur quelconque de T , un simple calcul montre que le point atteint a pour coordonnées $c_2 = (x_2, y_2, \theta_2) = (x_1 + T\cos\tau, y_1 - T\sin\tau, 0)$. Une étude élémentaire du comportement de la fonction $T\sin\tau$ montre que, parce que nous sommes "près" de l'origine, il est toujours possible de choisir une valeur particulière τ_c telle que le véhicule parvienne exactement sur l'axe des abscisses. Il suffit que τ_c soit solution de l'équation : (1) $|y - (1 - \cos\theta)| = T\sin\tau$

Le point atteint est le point c_2 de coordonnées

$$(x - \sin\theta + \tau_c (1 - \sin\theta + \tau_c (1 - \cos\tau_c)), 0, 0).$$

Une fois parvenu sur l'axe des abscisses, un dernier segment de droite en marche arrière amène le véhicule au but.

On remarquera que cette construction illustre bien la difficulté de commande du système : la variation souhaitée en orientation ou suivant l'axe des abscisses est "directement" issue de deux commandes élémentaires (première et dernière étape respectivement), tandis que la variation le long de l'axe des coordonnées a nécessité une séquence plus compliquée de manoeuvres. Cette dernière séquence illustre en fait un concept clé de la géométrie différentielle : le crochet de Lie de champs de vecteur.

Partant des "champs de vecteur" X et Y donnant naissance à un mouvement suivant un segment de droite et un arc de cercle respectivement, nous avons construit une combinaison qui donne naissance à un mouvement dans la direction de c_1 vers c_2 , direction pour laquelle on ne dispose pas de commande "directe" : cette direction correspond à un nouveau champ de vecteur, noté $[X, Y]$, le crochet de Lie de X et Y .

De manière plus formelle, nous venons de voir que, parce que les champs

de vecteurs X et Y avec leur crochet $[X, Y]$ permettent d'engendrer toutes les directions de mouvements dans la variété $R^2.S^1$, le système peut atteindre n'importe quel point de la variété.

On dit que le système est commandable. Cette propriété est centrale dans l'étude de la commande des systèmes.

Une borne au pire

Donnons maintenant une estimation d'une borne supérieure de la longueur du chemin construit. Cette longueur est :

$$l = |\theta| + 4\tau_c + |x - \sin\theta + \tau_c(1 - \cos\tau_c)|$$

Une première borne est obtenue en développant les valeurs absolues :

$$l \leq |\theta| + 4\tau_c + |x| - |\sin\theta| + |\tau_c(1 - \cos\tau_c)|.$$

En utilisant les inégalités $|\sin\theta| \leq |\theta|$ et $1 - \cos\tau_c \leq 1$, nous obtenons une seconde borne :

$$l \leq 2|\theta| + 5\tau_c + |x|.$$

Considérons maintenant l'équation (1); le point c étant proche de l'origine, τ_c est suffisamment petit pour vérifier $\sin\tau_c \geq 1/4 \tau_c$ et donc

$\tau_c \leq 2|x| + 10|y|^{1/2} + 10|1 - \cos\theta|^{1/2}$. De plus $|1 - \cos\theta|^{1/2} \leq |\theta|$ Il s'en suit que :

$$l \leq |x| + 10|y|^{1/2} + 10|1 - \cos\theta|^{1/2} + 2|\theta|$$

$$\leq |x| + 10|y|^{1/2} + 12|\theta|$$

$$\leq 12(|x| + |y|^{1/2} + |\theta|)$$

Au pire, il est donc possible d'atteindre l'origine à l'issue d'une trajectoire de longueur inférieure à $12(|x| + |y|^{1/2} + |\theta|)$.

Une borne au mieux

La construction que nous avons proposée est-elle la meilleure du point de vue de la longueur du chemin produit. Certainement non. Mais quel serait un seuil en deçà duquel il n'est pas possible de descendre?

Considérons n'importe quel chemin réalisable à partir des deux commandes élémentaires autorisées et partant du point $(0,0,0)$. Paramétrons ce chemin par son abscisse curviligne s . Soit $(x(s), y(s), \theta(s))$ les coordonnées

du point d'abscisse s sur le chemin. Par définition : $y(s) = \int_0^s \dot{y}(t) dt$

Or, la vitesse dans la direction de la variable y est égale à la projection de la vitesse $v(s)$ du système sur l'axe des abscisses. Nous supposons que le module de v est borné par 2 (m/s). Ainsi :

$$|y(s)| = \int_0^s |\dot{y}(t)| dt \leq 2 \int_0^s |\sin \theta(t)| dt \leq 2 \int_0^s |\theta(t)| dt$$

La seule manière de faire varier "au plus vite" l'orientation du véhicule est d'exécuter un arc de cercle de rayon minimal (égal à 1). Dans ce cas la variation angulaire se trouve confondue avec la longueur de l'arc. Par suite :

$$|y(s)| \leq 2 \int_0^s |\theta(t)| dt \leq 2 \int_0^s t dt = s^2$$

Donc, tout point de coordonnées $c = (x, y, \theta)$ atteint à partir de l'origine après une trajectoire de longueur s vérifie, au mieux, $|y|^{1/2} \leq s$.

D'autre part, il est clair que $|x| \leq s$ (la borne serait atteinte par une trajectoire en ligne droite) et que $|\theta| \leq s$ (la borne serait atteinte par une trajectoire réduite à un seul arc de cercle de longueur s).

Par suite la longueur de toute trajectoire amenant au point a a une longueur supérieure à $1/3 (|x| + |y|^{1/2} + |\theta|)$.

Conséquence

A ce stade, nous avons trouvé deux bornes encadrant la longueur du plus court chemin conduisant de l'origine à un point quelconque proche de l'origine.

Il se trouve que deux chercheurs américains (Reeds and Shepp) ont trouvé en 1990 quelle était la forme des plus courts chemins pour le système de commande de type voiture que nous considérons ici: ces plus courts chemins sont constitués d'une séquence composée d'au plus 5 arcs de cercle de rayon 1 ou segments de droite, et possédant au plus deux points de rebroussement.

Considérons la phase finale du créneau. La voiture est parallèle au trottoir et déjà engagée entre les deux véhicules en stationnement. Il s'agit maintenant pour le conducteur de progresser vers le trottoir afin que le véhicule n'empiète pas sur la chaussée. Soit ϵ la taille de l'espace libre entre les pare-chocs. Dans cet espace réduit un chemin de longueur ϵ ne permettra qu'un déplacement faible dans la direction orthogonale à l'orientation du véhicule.

Les bornes calculées ci-dessus nous donne une estimation du déplacement qu'on peut attendre d'un plus court chemin qui maintient le véhicule dans l'espace libre. En effet les variations Δx , Δy et $\Delta \theta$ à l'issue d'un plus court chemin :

$$1/3 (|\Delta x| + |\Delta y|^{1/2} + |\Delta \theta|) \leq \epsilon \leq 12 (|\Delta x| + |\Delta y|^{1/2} + |\Delta \theta|)$$

La variation suivant la direction qui nous intéresse (la direction suivant y) est donc une fonction linéaire de ϵ^2 . Si la profondeur du créneau est de 1

mètre, il faudra environ $1/|\Delta y|$ mouvements élémentaires correspondant à un plus court chemin. Chaque mouvement élémentaire comporte dans ce cas (illustré figure 4) exactement 2 points de rebroussement (ou "manœuvres").

Il faudra donc de l'ordre de ε^{-2} manœuvres pour finir de garer le véhicule.

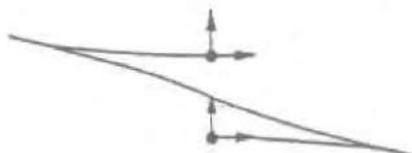


Figure 4

Deux points de rebroussement pour obtenir une variation Δy

On arrive ainsi au résultat: le nombre de manœuvres pour réaliser un créneau avec une voiture varie comme l'inverse du carré de l'espace libre entre les parechocs.

Et avec des remorque ?

Quelle serait la complexité d'un créneau si on ajoutait une caravane à la voiture ? Dans ce cas, le nombre de manœuvres à effectuer varierait comme l'inverse du cube de la taille de l'espace libre. Les derniers résultats de recherche en planification de mouvements pour système non holonomes montrent même qu'il est possible de parquer un véhicule tractant un nombre quelconque de remorques, comme ces chariots de convoyage qui circulent dans les gares et les aéroports. Il est possible de le faire en théorie seulement, car, en pratique, le nombre de manœuvres à effectuer est une fonction exponentielle du nombre de remorques dans le meilleur des cas, et doublement exponentielle dans le cas le pire ; en fait ce nombre peut varier comme $\varepsilon^{-\text{Fib}(n+1)}$ où n est le nombre de remorques et $\text{Fib}(n+1)$ est le $(n+1)^{\text{ème}}$ nombre de la célèbre séquence de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... (résultat dû à F. Luca et J.J. Risler de L'ENS à Paris).