Journées Nationales d'Albi 1996
Conférence samedi 26 octobre

Les treillis, un regard différent sur le monde

Laurent CHAUDRON

Nous vivons dans un monde où tout est censé avoir un prix. D'un point de vue mathématique cela veut dire qu'il existe une application qui va du monde réel dans IR (les réels quoi). Mais franchement, est-ce bien raisonnable de pouvoir comparer un poisson et une bicyclette ? Est-ce sensé de comparer - et mesurer l'écart entre - une mélodie dans la tête d'un auteur et une tonne de ferraille ? Le kilo de professeur de mathématiques est-il supérieur ou inférieur au kilo de boudin ?... Dans ce monde totalement ordonné et fou n'y-a-t'il pas place pour quelque chose de plus raisonnable ? Une petite structure simple à comprendre et utile pour représenter correctement une partie du sens de notre monde... Pourquoi pas les treillis ? Nous allons en rappeler les définitions essentielles, puis observer deux exemples d'utilisation pour la représentation de la connaissance, un des domaines de l'intelligence artificielle.

0 Rappels sur les relations d'ordre

Définition

E est un ensemble et < une relation binaire sur E. (E,<) est dit $\boxed{\textit{ordonné}}$ et < est une $\boxed{\textit{relation d'ordre}}$ si et seulement si :

O_1 $(\forall x \in E)$	$x < x$	*réflexivité*
O_2 $(\forall x, y \in E)$	$(x < y \text{ et } y < x) \Rightarrow (x = y)$	*antisymétrie*
O_3 $(\forall x, y, z \in E)$	$(x < y \text{ et } y < z) \Rightarrow (x < z)$	*transitivité*

On se gardera de dire : «un ensemble est ordonné s'il existe une relation d'ordre qui vérifie O_1, O_2 et O_3», car n'importe quel ensemble vérifie cette propriété (si si, relisez et vous verrez...).

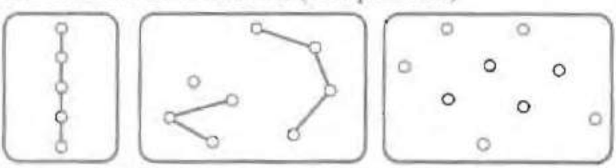
Exemples : quel que soit l'ensemble, l'*égalité* définit un ordre sur cet ensemble, c'est la plus simple (et la plus jolie ?) relation d'ordre. $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle est un ensemble ordonné ; comme tous ses éléments sont comparables entre eux, on dit que cet ensemble est totalement ordonné (on dit aussi : *une chaîne*. Au contraire, si aucune paire n'est comparable, on a une *antichaîne*). Si E est un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ est son ensemble de parties, alors la relation d'inclusion usuelle $\subset$ définit une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

En omettant O_2 , $<$ est alors une $\boxed{\textit{relation de préordre}}$ sur E

Exemples: dans un langage logique, et la relation définie par l'implication est une relation de préordre : elle est réflexive et transitive mais elle n'est pas symétrique car, intuitivement : $(\varphi \rightarrow \psi)$ et $(\varphi \quad \psi)$ signifient que $(\varphi \quad \psi)$ ce qui ne permet nullement d'affirmer que les deux formules sont proprement égales.

• Soit T la relation sur E dont le graphe est $E \times E$, (c'est à dire que tout élément de E est plus petit que n'importe quel autre). Alors T ne peut être qu'une relation de preordre (qui, en quelque sorte, représente un grand chaos).

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est un ensemble partiellement ordonné par la relation d'ordre *div* de divisibilité (voir plus loin)



Les trois ensembles de la figure ci-dessus représentent le spectre des possibilités des ensembles ordonnés, enti deux extrêmes : totalement "désordonné" à droite, totalement ordonné à gauche. Au milieu se trouve un ensemble quelconque partiellemei ordonné : on constate que certaines de ses parties sont aussi bien rangées que l'ensemble totalement ordonné (ce sont des sous-chaînes), cependant que d'autres parties sont aussi chaotiques que l'antichaîne.

Pour ce qui est des représentations graphiques, deux normes usuelles sont à connaître : (1) traditionnellement, la disposition verticale marquée d'un segment traduit l'ordre (le «machin» qui est en dessous est plus petit que le «truc» qui est au-dessus) ; (2) on ne représente pas les arcs transitifs.

On dit que l'on fait alors le *diagramme de Hasse.*

I - Rappels sur les treillis

Définition

D E un ensemble, $\wedge$ et $\vee$: $E \times E \rightarrow E$, y sont deux lois internes le triplet $(E, \wedge, \vee)$ est un $\boxed{\textit{trellis}}$ (en anglais, on dit : *lattice*.

E Pour tout x et pour tout y dans E :

$L_1 : x \wedge x = x, x \vee x = x$ *idempotence*

$L_2 : x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x$ *commutativité*

$L_3 : x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ *associativité*

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

$L_4 : x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ *absorbtion*

Exemples :

De ces trois ensembles 

seul celui du milieu est un treillis ; celui de gauche n'a pas assez de relations et celui de droite en a trop.

L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E muni des opérateurs d'intersection et de réunion est un treillis : $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup)$.

On voit qu'il n'est pas nécessaire de définir d'abord une relation d'ordre sur E pour le définir comme treillis, en effet :

Proposition de consistance

Tout treillis est un ensemble ordonné

En effet, soit R la relation définie sur E par

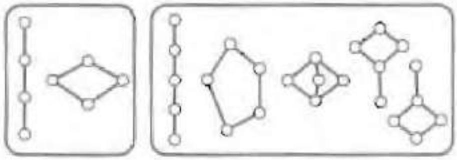
$$(x \mathrel{R} y) \Leftrightarrow_{\text{def}} (x \wedge y = x) \Leftrightarrow (x \vee y = y).$$

alors R est une relation d'ordre

Ainsi : dans un treillis, on peut fort bien ignorer totalement la relation d'ordre sous-jacente pour définir la structure de treillis elle-même. Par commodité, quand on désigne un treillis, il est souvent judicieux de rappeler le nom de l'ensemble, la relation d'ordre et les opérateurs inf et sup ainsi : $(E, <, \wedge, \vee)$ mais la présence de la relation d'ordre n'a rien d'indispensable.

• Tout ensemble totalement ordonné est un treillis.

• Si on note T_n l'ensemble des treillis à n éléments, on peut vérifier (essayez) que T_1, T_2 et T_3, sont constitués uniquement de chaînes ; dans la figure ci-dessous, à gauche on trouve T_4 et à droite T_5.

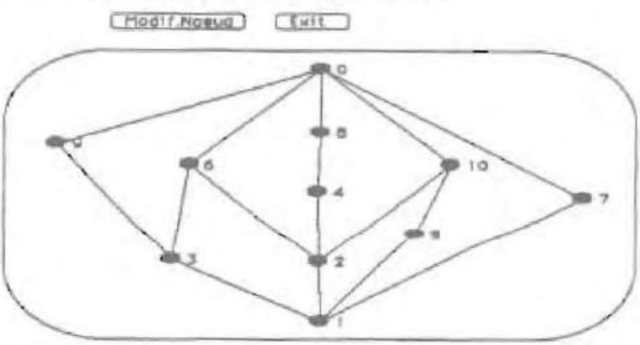


• Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel et $\mathcal{V}(\vec{E})$ l'ensemble de ses sous-espaces vectoriels, on notera toujours $\mathcal{P}(\vec{E})$ l'ensemble des sous-ensembles de $\vec{E}$. On sait déjà que $(\mathcal{P}(\vec{E}), \subset, \cap, \cup)$ est un treillis. Si l'opérateur "+" se comprend comme la somme vectorielle, on peut également écrire que $(\mathcal{V}(\vec{E}), \subset, \cap, \cup)$ est un treillis.

• Dans l'ensemble $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ des entiers de 0 à 10, la relation de divisibilité est, on le sait, une relation d'ordre, le sup et l'inf sont définis ainsi :

$$n \wedge m = \text{def pgcd}(n,m) \text{ et } n \vee m = \text{def ppcm}(n,m).$$

Alors (E, pgcd, ppcm) est un treillis. On y retrouve bien le sens de la proposition de consistance : «n est plus petit que m ssi $n \wedge m$ est égal à n» ; une fois traduit en termes numériques, cet énoncé devient : "n divise m ssi le pgcd de n et m est n". Le diagramme de E est alors[1] :



1 Cette figure est une copie d'écran réduite obtenue par un logiciel de représentation graphique ; le calcul de cette dernière est en général complexe.

On y voit que 1 est le plus petit élément et 0 en est le plus grand (joli non ?). On observe également que les nombres premiers sont ceux du premier niveau juste au-dessus de 1.

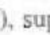
Propriétés des Treillis

On se reportera aux ouvrages de référence pour retrouver les définitions classiques des : *majorant, minorant, plus petit élément, plus grand élément, borne supérieure* («sup»), *borne inférieure* («inf»). La phrase à retenir pour la définition de $x \vee y$ et de $x \wedge y$ est : *«Le sup (resp. l'inf) est le plus petit des majorants (resp. le plus grand des minorants)»*. Ensuite, on peut étudier les diverses propriétés que peut posséder un treillis : *distributif* (c'est clair), *complet* (toute partie, y compris le treillis entier lui-même, a deux éléments universels inf et sup), *complémenté* (tout élément a un complément), un treillis qui a toutes ces vertus est un treillis *booléen*....

2 - Utilisation des treillis pour la modélisation de l'échange de connaissance

La situation que nous étudions est celle de deux personnes (dans le langage de l'intelligence artificielle distribuée, on dit : deux *agents*) dialoguent et coopèrent à l'élaboration progressive d'un résultat commun, par exemple : démonstration d'une conjecture, enquête, fusion de bases de données hétérogènes, élaboration de situation ce perception... La capacité de nos agents à mener une coopération cognitive libre se fait en respectant le caractère monomode du canal de communication oral : énoncé successif et alterné de formules par chacun des agents. On peut convenir qu'un support (tableau...) matérialise l'état courant de la solution commune, c'est le cas des mathématiciens qui étudient une démonstration. Le problème est de mathématiser la notion de progrès de la conjecture que leur dialogue permet d'obtenir.

Idée : utiliser les... treillis ! Le recours à cette structure a été imaginé assez vite pour plusieurs études, en particulier la *fusion symbolique*, non pas pour trouver "la" meilleure fonction donnant toujours "la" meilleure solution à un problème de fusion d'information, mais bien plutôt afin de se donner un cadre formel précis permettant de définir avec rigueur la notion de "meilleure" qui est le plus souvent polysémique. On a constaté dans de très nombreux cas concrets que deux éléments de connaissances n'ont aucune raison d'être comparables a priori ; les problèmes de fusion d'information font donc appel le plus généralement à des structures d'ordres partiels. Or, justement, dans le cas d'éléments non comparables, pour ne pas bloquer les processus de fusion, des liens leur sont souvent artificiellement imposés afin de décider automatiquement lequel est le meilleur. Pour éviter ce type de comparaison forcée, on a recours aux treillis.

Supposons donc que la connaissance échangée par nos agents appartienne toujours à un treillis, alors, soit e = , un énoncé avancé par l'un des agents et i =  l'énoncé proposé par l'autre agent, pour les fusionner en un élément f=  ; il est possible de calculer dans l'ensemble de connaissance (puisqu'il est censé être un treillis) leurs bornes inférieure  , et supérieure  ; le résultat de la fusion de e et i est tel que :f ∈ [inf (e,i), sup(e,i)]

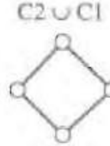
Les éléments de connaissance échangés par les agents «auto-contrôlent» le résultat possible de la fusion.

Dans ce contexte, on va être confronté à des problèmes des types suivants :

(1) Si le premier agent énonce : C_1 = «La voiture est en train de se déplacer» et le second : C_2 = «La voiture est bleue et est en train de se déplacer», il est clair que ce que dit le second contient ce que dit le premier. La structure est alors réduite à sa plus simple expression puisque les deux éléments de connaissance sont comparables : C_2 semble avoir plus grande «quantité» d'information que C_1 :

(2) De même, si on a toujours : C1 =«La voiture est en train de se déplacer» et C2 = « La voiture est en train de se déplacer à 45 km/h.», l'énoncé C2 est toujours supérieur à C1 mais cette fois c'est parce qu'il est plus «précis».

(3) Si le premier agent énonce : C_1 = «La voiture est une Citroën bleue», et le second : C_2 =«La voiture est une Citroën à moteur diesel», alors les opérations d'intersection et de réunion ensemblistes devraient pouvoir fournir une structure de contrôle cognitif assez simple :



(4) Le problème se complique si l'on a :C_1 =«La voiture est bleue et est en train de se déplacer», et C_2 = «La voiture est en train de se déplacer à 45 km/h.» ; en effet, pour ce qui est de la quantité d'information, C_1 est un énoncé supérieur à C_2. Mais pour ce qui est de la précision relative à la vitesse C_2 est plus précis.

Comment résoudre cette double contrainte pour offrir aux agents une structure d'échange de connaissance adaptée ? C'est le rôle du paragraphe suivant qui examine les détails de cette conjecture. Nous y présentons les résultats qui ont permis de définir la sémantique associée à une liste de propriétés, de déterminer une relation d'ordre partiel ainsi que les deux opérateurs inf et sup applicables à tout couple de propriétés de manière à offrir une structure de treillis.

Le Modèle cubique

Considérons un langage propositionnel composé d'un ensemble L_0 fini de formules atomiques $\{p_i,...,p_n\}$. Un énoncé d'agent est représenté par un élément p de l'ensemble des parties P de L_0 : $p = \{p_j,...,p_n\}$, appelé *cube*.

Définitions

Soient $p = \{p_i,...,p_n\}$ et $q = \{q_j,...,q_n\}$ deux cubes propositionnels.

$$\sup(p,q) =_{def} \{p_1;...,p_n\} \cup \{q_1;..,q_n\}$$

$$\inf(p,q) =_{def} \{p_j,...,p_n\} \cap \{q_1;..,q_n\}$$

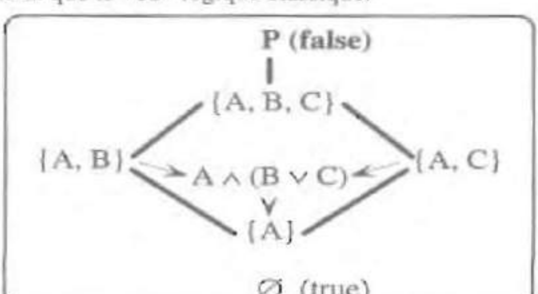
Un énoncé d'un des agents est caractérisé par le fait de vérifier toutes les propriétés du cube. On montre alors que l'implication logique et l'inclusion ensembliste définissent la même relation d'ordre sur les cubes. (On observe qu'il existe un plus grand et un plus petit élément qui, d'un point de vue ensembliste, sont respectivement P entier et ∅.

Théorème

$\boxed{(P, \subset, \sup, \inf) \text{ est un treillis complet}}$

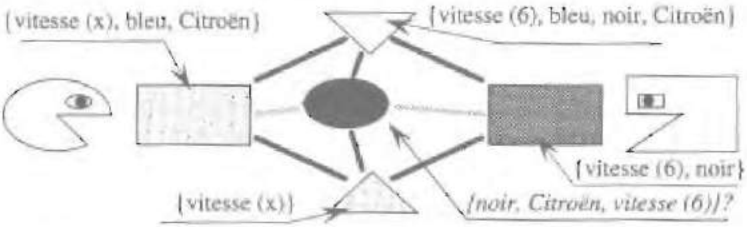
Exemple

Soient p = {A,B} et q = {A,C}, alors sup(p,q) = {A,B,C},inf(p,q)= {A}. D'un point de vue logique, on a : $p \wedge q = (A \wedge B) \wedge (A \wedge C) = A \wedge B \wedge C$, et: $p \vee q = (R \wedge B) \vee (A \wedge C) = A \vee (B \wedge C)$. Ceci exprime que l'inf. des cubes est un peu plus général que le «ou» logique classique.



Il est également possible de définir des cubes basés sur la logique des prédicats du premier ordre et d'adapter la relation d'ordre des cubes propositionnels à ces nouveaux cubes. On a vu (cas (1) du paragraphe précédent) que la question fondamentale concernait une nouvelle relation de spécificité de l'inform'ation liée aux variables et compatible avec l'implication. En utilisant un opérateur d'anti-unification, on a pu construire deux opérateurs $\cap_c$ et $\cup_c$ des cubes d'ordre 1 et démontrer qu'ils vérifient les propriétés requises : commutativité, associativité, idempotence et absorption permettant d'affirmer que : "$(P_1, \leq_c, \cup_c, \cap_c)$ est un treillis complet" (on ne présentera pas ces définitions et résultats ici, voir le rapport "*Ordres et Treillis*" cité en référence).

Exemples : dans le cas très simple suivant :



le résultat final de la fusion est simplement établi en choisissant différents littéraux énoncés par l'un et par l'autre des agents, avec une seule incertitude de précision : la valeur de la vitesse.

• Dans cet autre exemple : $C_1 = \{A(x,y), B(x), C(1)\}$

et $C_2 = \{A(x,y), B(2), C(z), D(3)\}$, alors :

$$\sup(C_1, C_2) = \{A(x,y), A(1,y), B(x), B(2), C(1), C(z), D(3)\}$$

$$\inf(C_1, C_2) = \{A(x,y), B(t), C(z)\}.$$

On constate alors que les incertitudes sur les variables ouvrent le champ du choix du résultat final de manière beaucoup plus large que dans l'exemple précédent : de nombreuses solutions d'unification sont possibles, à l'intérieur des différents cubes (y compris les cubes initiaux).

Les travaux se portent actuellement sur deux axes principaux : d'un point de vue statique, raffiner encore les cubes d'ordre 1 pour y inclure les contraintes et ainsi mieux représenter la connaissance ; d'un point de vue dynamique, étudier les lois d'échange, de stabilité et de convergence des échanges de connaissances par les cubes.

Ces études contribuent à la conception de systèmes coopératifs et à la compréhension des mécanismes de l'apprentissage cognitif.

3 - L'Analyse Formelle de Concepts

Le traitement de la connaissance et l'analyse de données utilisent la notion de concepts afin d'élaborer des interprétations d'informations symboliques. Par conséquent, un traitement formel de données et d'informations se doit de contenir une certaine compréhension formelle des concepts et des relations conceptuelles. L'Analyse Formelle de Concepts (A.F.C.) tente de procurer une telle compréhension en mathématisant la vision philosophique du concept en tant qu'unité de pensée composée de son extension (les cas concrets) et de son intension (les caractéristiques) ; exemple : (Médor, Milou,Rex,...)+(pelage, pattes(4), carnivore...) fait penser à...

L'AFC se base sur une modélisation théorique ensembliste de la notion de contexte de laquelle dérive formellement celles de concepts et de hiérarchies conceptuelles. Un résultat de base est que l'ensemble des concepts tirés d'un contexte forme tou jours une structure mathématique de treillis . Historiquement Arnaud et Nicole (1662) définissent un concept comme une collection d'exemples qui ont en commun un ensemble d'attributs. C'est seulement en 1982 qu'apparaît l'analyse formelle de concepts due à Rudolph Wille et qui se fonde sur des notions mathématiques plus anciennes: les connexions de Galois .*

L'Analyse Formelle de Concept permet, outre une représentation et explicitation de la connaissance une véritable exploration de celle-ci, en particulier pour l'induction d'inférence

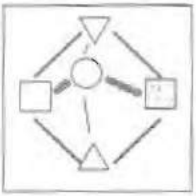
Ainsi, actuellement, l'application de cette méthode est à l'étude pour l'exploitation de données issues de satellites en vue de mieux comprendre le fonctionnement de la magnétosphère (en particulier la météorologie spatiale) domaine en plein essor.

4 - Une Conclusion

Les treillis... ils prennent en compte des ordres partiels, ils sont moins "gourmands" que les ordres totaux (voire totalitaires... l'argent ?...) et ils autorisent, lorsque deux éléments ne sont pas comparables, à trouver deux

* (NDLR : Laurent CHAUDRON a fait un beau développement de cette Analyse formelle des Concepts non proposée ici pour en rester à une longueur raisonnable du texte. Nous remercions l'auteur de cette marque appréciée de coopération).

autres éléments qui pourront les entourer de leur bienveillance : le sup. et l'inf. Ainsi la différence entre deux entités différentes du monde, loin de se réduire à une simple comparaison, permet une enrichissante construction .



Saint-Exupéry nous en donne le courage et Pierre Dac nous en donne la preuve (un de ses fameux articles prônait la supression des nombres pour rendre le monde plus juste !) : les treillis, c'est juste ce qu'il faut de mathématiques pour concevoir un monde « meilleur »... cultivons nos différences.

Quelques références

Garret BIRKHOFF, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, 1979 (first edition 1940), 418 p.

G. BOULAYE et A. KAUFMANN, *Théorie des treillis en vue des applications*. Masson, Paris, 1978.

Laurent CHAUDRON, *Treillis : Notions de base*, Rapport Interne Cert/Onera, 1/360003/Deri, avril 95.

Laurent CHAUDRON & Catherine TESSIER, *SupA-cooperation: when dfference and disagreement are constructive*. Proceedings of "Coop'95 : International Workshop on the design of cooperative systems", Juan-les-pins, 25-27 janvier 1995. (paru sous une forme revue dans "CSCW Journal" 1996).

B.A. DAVEY and H.A. PRIESTLEY, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, 248p.

R. FAURE et E. HEURGON, *Structures ordonnées et algèbres de Boole*. Gauthier-Villars, Collection« Programmation », Parsi, 1971.

B. GANTER und Rudolph WILLE, *Formale Begriffanalyse*, Springer, 1996.

LAKATOS Imre *Preuves et Réfutations* - Hermann 1984. (Proofs and Refutations. Cambridge Uni versity Press 1976).

Jean SALLANTIN *Concevoir des agents rationnels*, dans : Dossier scientifique du CNRS n°79 Sciences cognitives, Octobre 1992, page 70.