Le sixième sens

André DELEDICQ

J'ai décidé de vous parler d'un "sixième sens"...

Cela, évidemment, supposerait que l'on précise de quoi l'on parle. Qu'est-ce qu'un SENS ? Pourquoi y en a-t-il cinq, et non pas quatre, ou trois ? Question aussi difficile que celle du nombre des dimensions dans lesquelles nous vivons... Trois, quatre, cinq, vingt-sept ?

Alors, on pourrait adopter une attitude typiquement mathématique et hilbertienne : pour parler des "sens", comme pour parler de "points" ou de "droites", il n'est pas nécessaire de savoir de quoi l'on parle. Il suffit de bien préciser leurs liaisons avec d'autres concepts et de s'assurer de la non-contradiction de ce que l'on dit.

Je prendrais pourtant les choses de manière plus pragmatique :

- A quoi reconnaît-on l'existence d'un sens ?

La réponse à cette question est assez simple :

- Aux sensations qu'il procure et, particulièrement, soyons positifs, à celles qui procurent du plaisir ; le plaisir de contempler un beau lever de soleil, d'écouter les oiseaux chanter, de humer un parfum envoûtant, de goûter un plat exceptionnel ou de caresser qui l'on aime…

Mais il y a, au moins, un autre type de plaisir que ceux-là : un plaisir qu'aucun des cinq sens premiers ne peut revendiquer ; un plaisir auquel certains associent (assez malheureusement) l'adjectif "intellectuel" ; malheureusement, car il a ainsi l'air d'être plus ou moins abstrait, théorique et raisonné, alors qu'il est bien réel, inné, et que chacun peut le ressentir pour peu qu'il y porte attention.

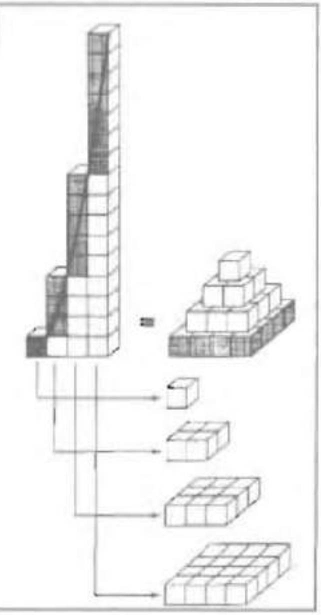
Ce plaisir, tout le monde l'a, en effet, déjà rencontré et éprouvé, comme monsieur Jourdain connaissait la prose sans l'avoir remarqué. Mais, pour en profiter pleinement, il faut, comme pour le goût, la musique ou les parfums, le cultiver et l'expérimenter pour apprendre à en goûter les saveurs.

Pour en parler ici, je pourrais essayer d'en décrire les caractéristiques et d'en esquisser une analyse ; et dire comment il semble apparaître, comme l'humour au coin du bois, dès que certaines associations se font dans notre esprit, ou que notre intelligence se fraie un chemin miraculeux dans la jungle de nos concepts, pour un véritable "kamasoutra" de l'âme.

J'ai pensé que le mieux était, en fait, de vivre ou de revivre, avec vous, quelques émotions témoignant de ce plaisir, de cette joie de l'esprit, que ce sixième sens est capable de provoquer, vous, professeurs de mathématiques, car c'est, me semble-t-il, dans cette discipline que cette joie est la plus facile à éprouver ; mais il est vrai qu'elle se manifeste dans bien d'autres domaines. J'en ai d'ailleurs trouvé la meilleure définition dans un texte de jeunesse d'Albert Camus (la préface de *L'envers et l'endroit*, rééd. Gallimard, 1958), dont je vous cite le passage :

L'écrivain a, naturellement, des joies pour lesquelles il vit et qui suffisentà le combler. Mais, pour moi, je les rencontre au moment de la conception, à la seconde où le sujet se révèle, où l'articulation de l'œuvre se dessine devant la sensibilité soudain clairvoyante, à ces moments délicieux où l'imagination se confond tout à fait avec l'intelligence.

1



"A ces moments délicieux où l'imagination se confond tout à fait avec l'intelligence..."

N'est-ce pas exactement ce que nous rêvons de vivre, seul ou avec nos amis, avec nos collègues et avec nos élèves ?

Donner des sensations, en mathématiques, c'est, souvent, donner du sens...

Voici, par exemple, une pyramide faite d'une trentaine de petits cubes.

Je peux prendre chaque "couche" de petits cubes et la recomposer en une "colonne" de cubes ; les quatre couches donnent quatre colonnes, que je mets côte à côte. (figure 1).

Je "vois" alors que la mesure (en volume) de la pyramide est exactement la mesure (en surface) de la face avant de l'ensemble des petits cubes dont la frontière supérieure approche, évidemment, la courbe de $x \to x^2$.

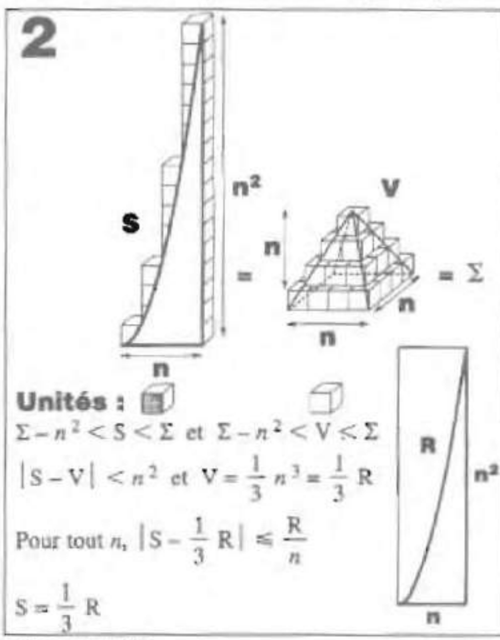
Et j'entrevois aussi (en sachant que ce ne sont pas alors mes yeux, mais mon sixième sens, qui opère maintenant) ceci : si on multipliait le nombre de couches de la pyramide initiale, en diminuant la taille des petits cubes, alors il y aurait toujours égalité entre le nombre mesurant le volume de la pyramide (qui vaut un tiers du cube x^3) et le nombre mesurant la surface sous la courbe de $x \to x^2$.

Voilà donc comment la quadrature de la parabole se trouve naturellement liée au fait qu'une pyramide soit le tiers d'un prisme !

Cependant, cette "vision" est encore floue , peut-être inhabituelle, en tout cas imprécise.

Alors (en continuant à emprunter des termes fondés sur une facile et pratique comparaison avec la vue) on éprouve le besoin "d'accommoder", de mieux voir, de mieux comprendre (avec ce mot, on est plus près du vocabulaire adapté au sixième sens). Ce besoin, c'est celui de relier ce que l'on entrevoit à des choses déjà vues et bien vues, déjà connues, déjà comprises, déjà intégrées comme sensations du sixième type.

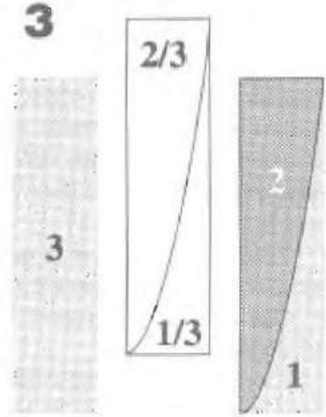
Et la satisfaction de ce besoin passe par le langage, en particulier par le langage mathématique. C'est donc l'activité de liaison (ici de nature intellec-tuelle, c'est-à-dire langagière ou logique), de démonstration, qui rend la vision plus nette et le plaisir de la contemplation plus assuré. Bien sûr l'expression de cette "démonstration" est plus ou moins schématisée selon les besoins ou les envies de l'acteur, selon les habitudes qu'il a prises dans l'utilisation de son sixième sens.



(Une démonstration est présentée dans la figure 2.) Cependant, plus encore qu'un regard, le sixième sens explore sanss cesse l'espace que ses sensations présentes ou passées lui ont construit.

Les figures 3 (de façon très naïve), 4 (beaucoup plus sérieusement) et 5 (montrant que l'intuition date au moins du XVII^e siècle) témoignent de cette exploration, débouchant sur un titillement qui est, à la fois, une sensation de profondeur et une question :

3



1, 2, 3, … ?

4

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n \sim \frac{1}{2} n^2$$

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 \sim \frac{1}{3} n^3$$

$$\sum_{p=1}^{n} p^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \sim \frac{1}{6} n^4$$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$? pour n grand

TRAITE ·

DES INDIVISIBLES.

Quand toutes les petites lignes ont entr'elles pareille différence, comme est la suite des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. alors elles sont toutes ensemble à la plus grande d'icelles prise autant de fois qu'il y en a de petites, comme le triangle au quarré qui a pour côté la plus grande ligne, c'est-à-sçavoir, comme 1 à 2, comme on voit au triangle qui est icy,

De même si les lignes suivoient entr'elles l'ordre des quarrez, la somme de toutes ces lignes ou des points qui les representent, seroit à la dernière prise autant de fois, comme la somme des quarrez au cube, ou comme la pyramide à la colonne, sçavoir comme 1 à 3, car quoique prenant un nombre fini de quarrez leur somme soit plus grande que le tiers du cube collateral au plus grand quarré, néanmoins dans la division infinie elle ne seroit que le tiers ;

Mais qu'est-ce qui peut bien se cacher derrière la suite des entiers?

Et en quoi les expressions du type nx^{n-1} ou $x^n/(n+1)$ sont-elles liées à des dimensions d'espace ?

Dans l'exemple que nous venons de voir, la prise de "sens" passe par une expérience très visuelle et par l'exploitation d'une situation très piagétienne, où le "sens" de la vue joue effectivement ici un rôle essentiel.

Il en sera souvent ainsi : ce n'est pas une mince surprise que de constater que *ce sont les cinq sens classiques qui donnent souvent leur sens aux situations intellectualisées que les mathématiques cherchent à mathématiser.*

Pour répondre à la curiosité du sixième type engendrée par les situations précédentes, nous avons développé quelques situations que nous ferons ici qu'évoquer (sans l'interactivité du "transparent" : nous avons ainsi, en utilisant les techniques de la représentation perspective, tenter de montrer comment la mesure des objets les plus "simples" (au sens du nombre de points qui les définissent) d'un espace (segment dans $\mathbb{R}$, triangle dans $\mathbb{R}^2$, tétraèdre dans $\mathbb{R}^3$, hypertétraèdre dans $\mathbb{R}^4$,... n-édre) se trouvait liée à la mesure des objets les plus "naturels" construits sur les vecteurs de base de cet espace (unité, parallélogramme, prisme parallélépipédique, hyperprisme, ..., n-prisme).

Cette liaison est fondée sur la duplication par déplacements du n-èdre en 1, 2, 3 ou 4 exemplaires pour former un n-prisme ; elle explicite le mode d'apparition des fractions 1/1 , 1/2 , 1/3 , 1/4 , ... ; complétée par l'interprétation du graphe d'une fonction de degré n comme une entité de degré $n+1$, elle génère apparemment une sensation de plaisir à la limite de la décence .

Nous ne reprenons pas ici, non plus la suite de démonstrations menant, depuis le volume du cube et en passant par le volume du tétraèdre (selon Legendre, dans sa *Géométrie*) puis de la pyramide, naturellement suivie du volume du cône (qui en est la limite), et du volume de la sphère (selon Galilée dans son *Discours au sujet de deux sciences nouvelles*), jusqu'à l'aire de la sphère (selon la technique du "fruit du platane", issue de celle du "mirliton d'Archimède" si efficace dans le cas du disque).

(Le lecteur curieux trouvera le développement correspondant dans le cahier *Maths & malices* du numéro 15 d'*Hypercube*.)

Ce que montrent ces exemples peut se résumer en une phrase :

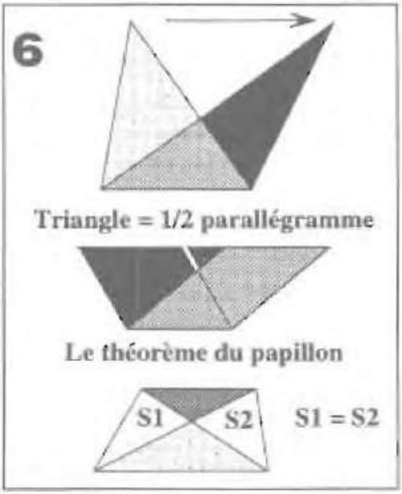
La sensation du sixième type trouve sa plus grande jubilation dans la pratique de la mise en relations : dans l'association des idées et l'analogie, d'abord et avec la plus grande liberté de pratique, mais aussi et surtout dans la version logique de ces activités qu'est l'activité de démonstration.

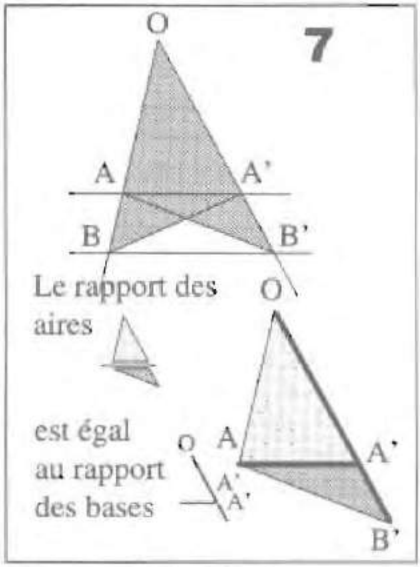
Ces exemples, qui s'adressent à des professeurs de mathématiques, ont été volontairement choisis plutôt difficiles, à la lisière en tous cas de leurs occupations habituelles, comme il faut le faire, il me semble, chaque fois que l'on souhaite expliquer quelque chose.

Mais il ne faudrait pas croire que les sensations du sixième type seraient réservées à une élite d'habitués. Tout un chacun, jeune ou vieux, peut y accéder, même si leur support est mathématique.

Donnons-en un exemple élémentaire, basé sur une théorie tout à fait "primaire" de la mesure.

C'est à partir d'elle, en effet, qu'Euclide démontre le théorème relatif à l'invariance de l'aire d'un triangle lorsqu'un sommet est translaté parallèlement au côté opposé. On obtient alors le "théorème du papillon", illustré par la figure 6.





Il suffit d'exposer ce résultat à un groupe d'élèves pour constater que leur sixième sens est en éveil et l'on verra comment il se manifeste en poursuivant la mise en scène par la démonstration du théorème de Thalès par la voie des aires, si bien tracée par Euclide et rappelée dans la figure 7.

Conclusion ;

Nous avons voulu parler d'un "sixième sens" et tenter d'en éveiller quelques sensations chez nos auditeurs.

Quel est l'organe de ce sixième sens et comment fonctionne-t-il vraiment?

Où est-il reconnaissable chez l'Homme et lui est-il spécifique ?

En fait, croyons-nous vraiment à son existence et allons-nous faire des recherches pour l'étudier ?

Chacun aura compris que nous nous sommes livrés, en grande partie, à un exercice de style sur le sujet. En priant l'auditeur, et le lecteur, de nous en excuser, nous voudrions faire une dernière remarque, qui rend cet exercice encore plus académique : nos cinq premiers sens nous mettent en contact avec le monde extérieur ; ils recueillent leurs sensations en dehors de nous, sur des objets qui nous sont en quelque sorte étrangers ; or le sixième sens travaille sur des objets qui nous semblent intérieurs et dont l'existence même paraît soumise à notre propre volonté ; est-il possible de prétendre qu'un "sens" ait son action limitée à l'individu exerçant ce sens, sans qu'un autre individu puisse exercer le sien sur le même objet ?

La réponse n'est peut-être pas aussi négative qu'il serait facile de le prétendre, dans la mesure où personne ne peut vraiment dire avec certitude d'où sortent les objets de notre pensée (en particulier ceux qui sont mathématiques) : soit nous les inventons en les créant par notre activité mentale, soit ils préexistent quelque part et nous ne faisons que les découvrir.

Les grands mathématiciens d'aujourd'hui penchent vers une opinion plutôt platonicienne ; ils disent avoir l'impression de se battre contre une matière qui leur résiste et "donc" qui existe.

Mais le débat reste (éternellement ?) ouvert ...

Quand même, "sixième sens" ou pas, serait-il possible que nous puissions priver les jeunes de l'éducation à un domaine aussi riche de sensations et de plaisirs ?

Nous qui voulons leur montrer le monde quotidien et les arts, leur apprendre la musique, les pousser à exercer leur corps et leurs goûts, il nous faut aussi les initier à cet extraordinaire plaisir qui ne coûte rien qu'une attention aux processus de notre intelligence, et qui n'est qu'une volonté de la conscience, heureuse de risquer l'analyse de ses propres mécanismes.

Dans cette ville d'Albi, n'est-ce pas, réellement, ce que Jean Jaurès aurait pu défendre (voir figure 8), lui qui sût adresser à la jeunesse l'un des plus beaux discours qu'il soit possible de lui tenir, celui de la paix ?

8

Le courage, c'est d'accepter les conditions nouvelles que la vie fait à la science et à l'art, d'accueillir, d'explorer la complexité presque infinie des faits et des détails, et cependant d'éclairer cette réalité énorme et confuse par des idées générales, de l'organiser et de la soulever par la beauté sacrée des formes et des rythmes.

... Le courage, c'est d'aller à l'idéal et de comprendre le réel.

... Le courage c'est de chercher la vérité et de la dire.

Jean Jaurès
Discours à la jeunesse, distribution des prix du lycée d'Albi
30 juillet 1903