Journées Nationales d'Albi 1996
Conférence Vendre 25 octobre

Calcul et signification

Jacques ARSAC
Professeur émérite
Université P. et M. Curie

1 - De la certitude

La question de la certitude a toujours intrigué les philosophes. Platon déjà se demandait pourquoi on ne pouvait atteindre en morale la même certitude qu'en mathématiques. Il n'accusait pas le langage : celui qui a nommé les choses savait le nom juste qui convient à chacune («Le Cratyle»). Les grammariens du Moyen-Âge reconnurent que le nom n'est ni la chose, ni une émanation de la chose, il ne lui est lié que par une convention arbitraire. Dès lors, comment un raisonnement, jeu sur les mots, peut-il atteindre les choses ? Le langage devenait la cause de nos malheurs. Si nous ne pouvons atteindre la certitude en morale ou en philosophie, c'est à cause de babel : il y eut un âge d'or où un langage parfait permettait de tout prouver.

Dans son texte «de l'esprit de géométrie ou de l'art de persuader», Pascal [1] dit que la géométrie peut atteindre la certitude parce qu'elle n'utilise que des mots qu'elle a parfaitement définis, tandis que dans le langage ordinaire, des mots ne peuvent être définis, parce qu'en remontant de définition en définition, on entrera dans un cercle vicieux. Le langage est construit sur des mots primitifs non définis considérés comme évidents ; le temps, l'être, etc. NEWTON puis LEIBNIZ pensèrent que l'on pouvait construire une «Caractéristique universelle» langage parfait comme avant Babel. Le mathématicien Gotlob FREGE [2] reprit ces idées : *«dans un système de signes pavait, un sens déterminé devrait correspondre à chaque expression. Mais les langues vulgaires sont loin de satisfaire à cette exigence»*. Il créa donc une idéographie, nouvelle tentative de langage parfait.

La logique avait étudié les formes valides de raisonnement. KANT fit remarquer qu'elle n'établit pas la validité d'une conclusion par son contenu, mais par la façon dont elle est liée, par sa forme, aux prémisses supposées vraies. La logique ne peut être que formelle, calculable selon BOOLE. La piste du formalisme fut exploitée par FREGE, RUSSELL, HILBERT, aboutissant aux systèmes formels dans lesquels seule compte la syntaxe. On s'est alors demandé [3] si le langage mathématique était pur jeu syntaxique de formes, tirant sa force de sa cohérence, mais sans lien avec le monde dont il ne dit rien, «car, que disent les mathématiques : Rien» (WITTGENSTEIN [4]). Si l'on rapproche ceci de la fameuse sentence de GALILÉE : *«le livre de la nature est écrit dans le langage des mathématiques»*, on arrive à une curieuse vue des sciences. A l'opposé, un tenant de l'intelligence artificielle comme Herbert SIMON [5] note que tout calcul est fait sur des symboles. Or, *«les symboles sont à la base des actes de l'intelligence.»* Il en résulte que, pour lui, tout est calcul, le langage mathématique étant de même nature que le langage ordinaire. C'est la question que nous allons aborder, en partant d'une analyse de la notion de calcul selon Turing, et des données actuelles de la linguistique.

2 - Le calcul

Pour définir le calcul, TURING s'est inspiré de la façon dont on fait une addition. On place les nombres l'un sous l'autre, on examine la colonne de droite. On lit ses chiffres, une table donne le résultat, on en écrit les unités, puis on passe à la colonne suivante, avec ou sans retenue. TURING généralise en imaginant une machine qui peut lire un ruban divisé en cases, ou écrire dessus. Appelons «case courante» celle qui est sous la tête de lecture ou d'écriture. Un registre contient un numéro. La machine peut faire diverses actions : lire le caractère dans la case courante ou y écrire un caractère, avancer ou reculer le ruban d'une case, mettre un numéro dans le registre, arrêter. Pour définir l'algorithme à calculer, on constitue un tableau dont les lignes sont repérées par des numéros et les colonnes par des caractères. Les cases contiennent un repérage codé d'actions exécutables par la machine.

A chaque pas de calcul, la machine lit le caractère de la case courante, qui sélectionne une colonne du tableau. Le numéro du registre sélectionne une ligne : la case ainsi repérée détermine l'action que doit faire la machine, et le nouveau numéro du registre. Quand cette action contient la commande d'arrêt, le calcul est fini. Un caractère sélectionne une colonne, un numéro dans le registre sélectionne une ligne, le contenu d'une case sélectionne une action. Or, tout calcul peut être fait par la machine de TURING. La sélection est donc le mécanisme de base.

Le choix des numéros repérant les lignes est arbitraire. On peut prendre des entiers successifs, mais c'est sans importance ; il suffit que chaque ligne du tableau soit repérée par un numéro différent, et qu'il y ait concordance entre ces numéros et ceux donnés par la table. Il en va de même pour les caractères : si l'algorithme ne fait appel qu'à deux caractères, on peut choisir «a, b» ou «0, 1» ou « ¿ , || »... Il importe seulement que que la convention choisie soit respectée en tous les points où interviennent les caractères, et ne soit pas modifiée pendant l'exécution du calcul. Elle peut demeurer inchangée sur plusieurs exécutions, être modifiée ultérieurement. On retrouve ainsi trois traits attribués par De SAUSSURE [6] au langage. Les éléments du langage sont donnés par une **convention arbitraire** (sociale dans le cas des langages naturels). Ils agissent par **différence** (un caractère exclut tous les autres). Ils sont **synchrones** formant à un instant un système conventionnel, doté d'une certaine permanence **dyachronique** dans le temps.

3 - Sens et référence

Mais il y a des différences importantes entre le langage du calcul et le langage ordinaire. Saint Augustin avait reconnu qu'un mot est un **signifiant** auquel est attaché arbitrairement un **signifié**. Guillaume d'OCCAM a précisé le mécanisme de la *supposition* (traduction par PANACCIO [7] de «suppositio» mis pour). Un mot est mis à la place d'un objet ou d'un concept. Un mot est un signe, objet matériel qui renvoie à quelque chose d'un autre ordre (Eco [8]) : *aliquid stat pro aliquo*.

Il n'y a rien de tel dans une machine de TURING. Un caractère n'est pas mis pour un objet, il sélectionne seulement une colonne dans un tableau. On peut dire qu'il désigne cette colonne. Par là, on se rapproche de la *suppositio* ; il y a analogie entre le fait qu'un caractère désigne une colonne, et un "chat" un animal. Mais peut-on confondre désignation et signification ? Un nom propre désigne une personne, il opère par différence en la séparant des autres. Ce qu'il désigne peut être manifesté en le montrant du doigt. FREGE [3] distingue soigneusement cette désignation, qu'il appelle dénotation, de la signification qui est d'un autre ordre de complexité. SAUSSURE ne reconnaît dans le mot qu'un signifiant et un signifié. Cela ne rend pas compte de la complexité du langage. On a donc introduit un troisième terme, en reprenant les idées de FREGE : le référent. Un mot est un signifiant qui, le plus souvent, désigne son référent, objet ou concept, et en dit quelque chose par sa signification.

Prenons un exemple. Je dis «X est un témoin au procès Y». «témoin» est un mot de six lettres. C'est un signifiant, parce qu'il désigne et dit quelque chose. Il désigne le rôle de X dans le procès Y en agissant par différence : X n'est ni juge, ni avocat, ni greffier... Ce rôle est le référent du mot «témoin». Mais il nous dit en plus quelque chose de X, et il faut plusieurs pages à RICŒUR [9] pour le préciser : X a vu quelque chose d'important pour le procès, il a accepté de venir le dire au tribunal, il s'est engagé à dire la vérité, il connaît les risques qu'il court s'il ne la respecte pas, il sait qu'il peut s'exposerà de sérieux ennuis pour être venu témoigner, le mot grec pour témoin est «martyr»,,, Tout cela, c'est la signification du mot témoin. C'est au-delà de ce que désigne le mot.

Quand le référent d'un mot est un objet, on le définit en montrant du doigt : ceci est mon ordinateur. C'est plus compliqué quand le référent est un concept. WITTGENSTEIN [4] remarque que si je dis «cela s'appelle deux» pendant que je montre deux noix, l'enfant pensera que «deux» c'est ces deux noix là. Il faut montrer deux noix, deux doigts, deux gâteaux, deux billes... jusqu'à ce que l'enfant regroupe mentalement toutes ces paires dans un même ensemble pour en abstraire ce qu'elles ont de commun : l'objet mathématique «deux».

Dans le langage usuel, il est difficile d'isoler un référent sans entraîner le signifiant. Quand je dis : «voici mon ordinateur» en montrant l'objet du doigt, j'introduis en même temps des questions : qu'est-ce qu'un ordinateur ? Cet objet-là. Mais encore ? dans la plupart des mots, référence et signification sont plus ou moins imbriquées. Dire : «c'est mon ordinateur», c'est dire que c'est «un» ordinateur, et qu'il est à moi. «Ordinateur» n'est pas défini par la vue de l'objet. Il faut donc admettre que la définition du référent peut ne pas être atteinte en le montrant simplement du doigt. En outre, la limite entre référent et signifié n'est pas toujours très nette. Mais ce n'est pas parce que référent et signifié interagissent qu'il faut les confondre : *«il importe d'établir que le terme "signification" s'emploie d'une manière incongrue dès qu'on prétend désigner ainsi l'objet "correspondant" au mot. Cela revient à confondre la signification d'un nom avec celui qui le porte. »* (WITTGENSTEIN 16])

4 - Les systèmes formels

Là est la spécificité du langage du calcul. Au niveau le plus bas, celui de la machine de TURING, les caractères et les numéros n'ont d'autre fonction que de sélectionner. On peut à la rigueur dire qu'un numéro, désignant une ligne dans un tableau, a cette ligne pour référent. Il n'intervient pas pour ce qui est sa référence ordinaire : «deux» désigne une ligne, pas le successeur de
1. La machine de TURING réalise un système formel à la HILBERT, avec des caractères, des règles de réécriture, des axiomes. Prenons un exemple. Voici un système formel utilisant les caractères **o, p, s**. Pour abréger, disons que **X, Y, Z** sont des suites de "s" peut-être vides. Il y a deux règles de réécriture :

R_1 : **XoYpZ** donne **XsoYpZs** R_2 : **XoYpZ** donne **XoYspZs.**

L'axiome est "**op**". Par les deux règles, on obtient successivement R_1 "**sops**" R_2 "**sospss**" R_2 "**sosspsss**" R_2"**sossspssss**" R_1 "**ssossspsssss**" etc. il n'y a rien d'autre. Les caractères n'ont aucun autre référent, ils ne jouent que par différence. Les formules du système n'ont pas davantage de référents, encore moins de signification. Ce sont simples jeux d'écriture suivant des règles formelles (qui ne dépendent que de la forme).

On peut "interpréter" ce système (c'est le mot utilisé par les mathématiciens, pris ici dans une acception technique) en attachant un référent aux caractères et aux formules. Convenons qu'une suite de s a pour référent le nombre de s dans la suite, que o désigne "+" et p désigne "=". "ssossspsssss" a pour référent "2 + 3 = 5". Si l'axiome est vrai dans cette interprétation, "**op**" désigne "0 + 0 = 0", et si les règles de réécriture sont valides, "**XoYpZ**" ayant pour référent "x + y = z", R_1 donne "(x + 1) + y = (z + 1)" et R_2 "x + (y + 1) = (z + 1)", alors toutes les formules sont vraies dans cette interprétation, l'univers des référents étant un modèle du système formel. Une autre interprétation considère les **X, Y, Z** comme des suites de caractères "**s**", "**o**" désigne la concaténation, "**p**" l'égalité. Il n'y a pas nécessairement unicité d'interprétation ni de modèle.

5 - Les niveaux de langage

On a ainsi plusieurs niveaux de langage. Au niveau le plus bas, que nous appellerons formel strict, il n'y a que des formes et des règles de syntaxe, les caractères ne désignent rien, ne renvoient à rien, il n'y a ni référence ni signification. Au niveau suivant, disons formel au sens large, par le mécanisme "d'interprétation", les formes ont des référents, les phrases établissent des relations entre les référents : «trois est le successeur de deux», «la force est le produit de la masse par l'accélération», etc... Les mots n'ont pas de signification : «car quelle est la signification de cinq ? Il n'en est pas question ici, sinon de savoir comment on s'en serf» (WITTGENSTEIN). Les phrases créent des relations, elles n'introduisent pas de sens.

Le langage ordinaire associe aux mots un référent et une signification, comme nous l'avons dit du mot «témoin». «Le chat est sur le paillasson» peut être pris comme un texte formel au sens large, établissant une relation entre les référents désignés par les mots «chat» et «paillasson». Mais cette phrase n'est pas de la même nature que «le chat est un carnivore» : dans un cas, «le chat» désigne un animal concret, la phrase répond peut-être à la question angoissée de son propriétaire qui craignait de l'avoir perdu (c'est une interprétation possible), tandis que dans l'autre cas, «le chat» désigne une espèce.

La signification d'une phrase peut être interprétée (le mot n'ayant plus ici l'utilisation technique qu'il a dans les systèmes formels), en la plaçant dans un certain cadre conceptuel, et ce de plusieurs façons. Ainsi par exemple, la commission biblique pontificale [10] a recensé de nombreuses interprétations de l'écriture : interprétation sociologique, psychanalytique, libérationniste, féministe, fondamentaliste,... C'est de la même façon que le Misanthrope de Molière peut être joué comme un drame ou comme une comédie. L'interprétation intervient après que le sens ait été reconnu : c'est le sens qui est interprété, pas le texte. Il n'est pas évident qu'il puisse exister une interprétation canonique d'un texte. Chaque lecteur s'en fait sa propre interprétation, laissant ouverte la question de l'intention de l'auteur. Le cas du sens est moins clair. Il n'y a pas de consensus sur la question de l'objectivité du sens d'un texte. Je soutiendrais volontiers que le sens est unique (c'est ce qu'a voulu dire l'auteur, le mot "vouloir dire" marquant une intention), ce sont les interprétations qui sont multiples, et inévitables dès qu'il y a signification.

6 - Calcul et signification

Au-delà du langage ordinaire, on trouve le langage poétique qui peut aller jusqu'à abandonner l'idée de référence : il n'est pas là pour décrire le monde extérieur, il n'est pas nécessaire qu'il parle de quelque chose, pas plus que la peinture abstraite ne représente quelque chose. Nous avons ainsi toute une gradation qui va du langage formel strict, sans référence ni signification, au formel large, avec référence mais sans signification, au langage ordinaire qui dit quelque chose de quelque chose, et au langage poétique qui ne se réfère pas nécessairement à quelque chose. Les interprétations ne sont possibles que quand il y a signification. Les textes formels, stricts ou larges, ne peuvent être interprétés de cette façon-là, ce qui résout le problème posé par FREGE : l'univocité du langage est assurée par l'absence de signification qui implique l'impossibilité d'interprétation.

Il faut noter que les mathématiques n'ont pas été d'abord formelles. Il y eut un temps où les nombres avaient un sens : dans la Bible, 40 mesure toute durée significative (le déluge, l'exode, le séjour de Moïse sur le Sinaï, d'Elie sur l'Horeb, de Jésus au désert...). Du temps de ma jeunesse, la droite était l'image d'un fil tendu, ou ce que l'on dessine avec une règle et un crayon.

Mais 7 + 3 ne fait pas 10 parce que 7 est le nombre de jours de la création dans la Genèse, 3 le nombre de personnes de la Trinité et 10 le nombre des commandements donnés à Moïse. Il serait intéressant de retracer l'histoire de cette montée du formel : comment est-on passé de «deux noix» à «deux», du fil tendu à l'application affine.

Cette reconnaissance des niveaux de langage éclaire la question de la certitude en mathématiques. Quand les mots ont des référents bien définis, mais pas de signification, quand les phrases établissent des relations entre les référents sans faire intervenir un sens susceptible d'interprétation tout lecteur lira un texte de l'unique façon suivant laquelle il a été rédigé, sans pouvoir l'interpréter à sa guise. Dès que des significations apparaissent, l'univocité réclamée par FREGE disparaît.

Parce qu'il y a différents niveaux de langage, les affirmations de Herbert SIMON sont irrecevables. Ce qui est vrai à un niveau ne peut être automatiquement transposé à l'autre. Il est vrai que le calcul opère sur ce qu'on appelle des symboles, mais ce sont des symboles avec référents ("+" désigne l'addition) sans signification, tandis que dans le langage courant au contraire, le symbole est de la nature du signe, désignant pour référent un objet matériel qui renvoie à une signification immatérielle (la colombe est le symbole de la paix) pas nécessairement lié au référent autrement que par une convention. Ces deux acceptions du mot symbole n'ont en commun que les lettres dumot.

La question du rapport du langage mathématique au monde extérieur peut aussi se comprendre par la différence qu'il y a entre «deux» et «deux doigts». L'un est un objet mathématique formel, désignant un élément dans la suite des entiers naturels, tandis que l'autre désigne un couple concret. Laurent SCHWARTZ disait un jour *«les mathématiques sont dans la nature, mais sous une forme inutilisable»*. La formalisation est l'opération clé qui abstrait un objet mathématique de faits d'expérience. Parce qu'il a été formalisé, il devient élément d'un langage qui opère par sa cohérence, hors de toute interprétation. Parce que l'objet vient de l'expérience sensible, il reste ancré dans le monde extérieur, il peut être utilisé pour le décrire. Les mathématiques ne sont pas une construction totalement arbitraire. Parce que l'homme se meut très difficilement dans un système formel sans référents, ne renvoyant à aucune image sensible, chacun a tendance à associer des images aux formes, puis à les interpréter. C'est inévitable et ce n'est pas nécessairement mauvais.

Mais ces images ne jouent aucun rôle dans la force de conviction liée au formalisme : elles peuvent aider à pénétrer dans un formalisme (comme l'image du calculateur a aidé TURING à inventer sa machine), elles peuvent être indispensables dans l'enseignement. Mais il faut pouvoir les dépasser, elles n'interviennent pas dans la démonstration. C'est le formalisme qui a le dernier mot.

Références bibliographiques

[1] B. PASCAL, «*De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*», 1658 La Pléiade, Gallimard, Paris, 1954.

[2] Gotlob FREGE, «*Sens et dénotation*», 1892, Le Seuil, Paris, 1971.

[3] Colloque «*La sémantique dans les sciences*», Beauchêne, Paris, 1978

[4] L.WITTGENSTEIN, *Investigations philosophiques*, 1943. Traduction française, Gallimard, Paris, 1961.

[5] A.NEWELL, H. SIMON, «*Computer science as empirical enquiry : symbol and search*», Com. ACM, 19, 1976, p.113-126.

[6] Ferdinand DE SAUSSURE «*cours de linguistique générale*» 1906-1911 Lausanne - Paris, Payot.

[7] Claude PANACCIO «*Les mots, les concepts et les choses*», Bellarmin Vrin, Paris, 1992.

[8] Umberto ECO, «*sémiotique et philosophie du langage*», Einodi, Torino, 1984.

[9] Paul RICOEUR, «*L'herméneutique du témoignage*», 1972 dans «*Lectures 3*», Le Seuil, Paris, 1994

[10] Commission Biblique pontificale «*L'interprétation de la Bible dans l'Eglise*», Cerf, Paris, 1994.