OLYMPIADES 1996

37 ème Oympiade Internationale de Mathématiques Bombay - 1996

François LO JACOMO

Introduction

C'est à Bombay (Inde) que s'est déroulée, du 5 au 17 Juillet 1996, la 37ème Olympiade Internationale de Mathématiques, réunissant 426 candidats de 75 pays. Avec seulement deux médailles d'argent pour les deux premiers prix du Concours Général, Lionel FOURQUAUX (Lycée Stanislas, Paris, 20 points sur 42) et Thomas DENEUX (Lycée Hoche, Versailles, 21/42), la France en revient 36ème au classement officieux des pays.

Certes, les sujets étaient plus ardus que l'an passé (cf. *Bulletins* 401, p.955 et 402, p. 81), aucun problème n'était "facile" comme les numéros 1 et 4 de 1995, et le problème 5 était redoutable, mais l'an passé, nous étions un peu au-dessus de la moyenne mondiale, ce qui n'est plus le cas cette année, la moitié de nos candidats ayant obtenu entre 2 et 5 points sur 42. «C'est dur, mais il faut bien être conscient que c'est le reflet exact de notre enseignement des Mathématiques dans nos lycées», écrit, dans son rapport, Claude Deschamps (Louis-le-Grand), chef de la délégation française et président du comité consultatif international.

Notre critère de sélection, le Concours Général, est aujourd'hui bien dans l'esprit de l'Olympiade, mais ses résultats sont publiés trop tardivement pour que les lauréats puissent bénéficier d'une préparation suffisante à l'Olympiade : «le stage de préparation, absolument nécessaire mais évidemment insuffisant pour combler le retard de nos candidats, a eu lieu du 24 juin au 6 juillet au lycée Stanislas». En outre, le contenu des programmes prépare mal à ce genre d'exercice : «il faudrait absolument que nos programmes de Terminale S permettent aux élèves de développer leur capacité à raisonner et surtout que le mot ***démontrer*** reprenne tout son sens», ajoute Claude Deschamps.

Autres critères de sélection ? Intensification des activités Mathématiques extra-scolaires ?... une réflexion s'impose et elle est en cours, mais sans attendre, il est important de diffuser le plus largement possible les sujets de l'Olympiade dans nos lycées, afin de donner aux candidats potentiels l'envie de concourir. Rappelons que ces problèmes nécessitent, en principe, fort peu de connaissances, et peuvent donc être abordés même avant la terminale (Francis DREY, 67 - Hagueneau, m'écrit qu'il a proposé l'énoncé 1 de 1995 à deux de ses élèves de Première S).

A titre de comparaison, voici un tableau équivalent à celui publié l'an passé, donnant pour chaque problème, pour tous les candidats et pour les candidats français, la moyenne, le nombre de notes maximales (7/7) et le nombre de zéros.

	INTERNATIONAL			FRANCE		
	7/7	0/7	Moyenne	7/7	0/7	Moyenne
1	15%	15%	3,2	0/6	0/6	2,8
2	21%	41%	2,1	1/6	1/6	1,8
3	12%	11%	2,4	1/6	0/6	3,0
4	20%	42%	3,1	0/6	2/6	0,7
5	1%	73%	0,5	0/6	4/6	0,3
6	23%	46%	2,2	1/6	3/6	1,5

	1996	1995
Médaille d'or	28/42 (35 candidats)	37/42 (30 candidats)
dont score maximum:	*42/42 (1 candidat)*	*42/42 (14 candidats)*
Médaille d'argent	20/42 (66 candidats)	29/42 (71 candidats)
Médaille de bronze	12/42 (99 candidats)	19/42 (100 candidats)

ENONCÉ 1

$ABCD$ est un tableau rectangulaire dans lequel $AB = 20$ et $BC = 12$. Ce tableau est subdivisé en 20×12 carrés unité. On se donne un entier strictement positif r.

Un jeton peut se déplacer d'un carré à un autre si et seulement si la distance des centres de ces deux carrés est exactement $\sqrt{r}$.

Le but est de trouver une suite de déplacements amenant le jeton du carré ayant pour sommet A au carré ayant pour sommet B.

a) Montrer que ceci ne peut pas être réalisé si r est divisible par 2 ou par 3.

b) Montrer que ceci peut être réalisé si $r = 73$.
c) Ceci peut-il être réalisé si $r = 97$?

SOLUTION

Numérotons les lignes de 0 à 11 et les colonnes de 0 à 19. Partant de la case (0,0), le jeton doit atteindre la case (19,0). Or, pour qu'il puisse se déplacer de a lignes et b colonnes ou de b lignes et a colonnes, il faut et il suffit que $a^2 + b^2 = r$.

a) Si r est pair, $a^2 + b^2 = r$ entraîne que a et b sont de même parité. En partant de la case (0,0), le jeton ne peut atteindre que des cases (x,y) où x et y sont de même parité. Il n'atteindra donc jamais la case (19,0).

Si r est multiple de 3, comme tout carré est congru à 0 ou 1 modulo 3, $a^2 + b^2 = r$ entraîne que a **et** b sont multiples de 3, donc que r est multiple de 9. En partant de la case (0,0), le jeton ne peut atteindre que des cases (x,y) où x **et** y sont multiples de 3, donc il n'atteindra jamais la case (19,0).

b) Pour que $a^2 + b^2 = 73$, il faut que l'un des carrés soit au moins égal à 73/2 ; seules possibilités : $a = \pm 8$ et $b = \pm 3$ ou l'inverse, d'où 8 mouvements possibles. Si, pour aller de la case (0,0) à la case (19,0), le jeton fait m mouvements de type $\pm(8,3)$, n de type $\pm(8,-3)$, p et q de type $\pm(3,8)$ et $\pm(3,-8)$ (m représente plus précisément le nombre de mouvements de type (8,3) **moins** le nombre de mouvements de type (-8,-3), etc.) alors on doit avoir :

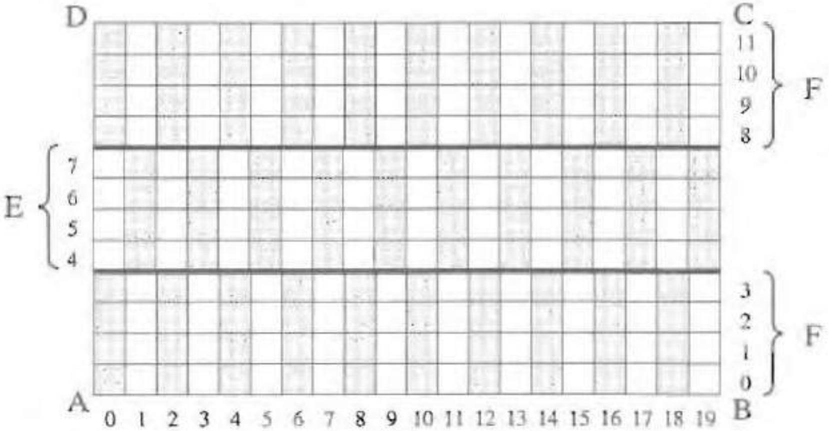
$$8(m+n) + 3(p+q) = 19 \qquad\qquad 3(m-n) + 8(p-q) = 0$$

p et q ne pouvant être de même parité, l'une des solutions les plus simples est que $p - q = 3$ et $m - n = -8$, $p + q = 1$ et $m + n = 2$, soit $m = -3$, $n = 5$, $p = 2$, $q = -1$. Sur un tableau infini, n'importe quel déplacement de trois mouvements de type $(-8,-3)$, 5 de type $(8,-3)$, 2 de type (3,8) et 1 de type $(-3,8)$ nous mènerait de la case (0,0) à la case (19,0). Mais pour notre problème, il importe de ne pas sortir des limites du tableau, ce qui impose quelque tâtonnement. Une méthode efficace est de noter à chaque mouvement le nombre de pas qu'il nous reste à faire dans chacune des quatre directions, par exemple ainsi :

	Nombre de pas restant à faire			
case atteinte	$(-8,-3)$	$(8,-3)$	(3,8)	$(-3,8)$
(0,0)	3	5	2	1
(3,8)	3	5	**(1)**	1
(11,5)	3	**(4)**	1	1
(3,2)	**(2)**	4	1	1
(0,10)	2	4	1	**(0)**
(8,7)	2	**3**	1	0
(0,4)	**(1)**	3	1	0
(8,1)	1	**(2)**	1	0
(11,9)	1	2	**(0)**	0
(3,6)	**(0)**	2	0	0
(11,3)	0	**(1)**	0	0
(19,0)	0	**(0)**	0	0

c) Si $r = 97$, $a = \pm 9$ et $b = \pm 4$ ou l'inverse ; sur un tableau suffisamment grand, la technique ci-dessus s'appliquerait, mais le fait qu'il n'y ait que 12 lignes nous empêche d'atteindre la case (19,0) en partant de la case (0,0).

En effet, appelons **E** la partie du tableau constituée par les quatre lignes centrales (4 à 7), et **F** le reste du tableau (lignes 0 à 3 et 8 à 11). Un mouvement de type (±4, ±9) nous fait passer de **F** à **F** sans changer la parité de l'abscisse alors qu'un mouvement de type (±9, ±4) nous fait passer de **F** à **E** ou de **E** à **F** en changeant la parité de l'abscisse. Dans tous les cas, on ne peut aller que d'une case noire à une case noire ou d'une case blanche à une case blanche (cf. figure ci-dessous), on n'ira donc jamais de la case noire (0,0) à la case blanche (19,0).



REMARQUES

Trois lecteurs m'ont fait parvenir leurs solutions : Dominique DAVION (73-Drumettaz), Alain SEBAOUN (78 - Carrières sous Poissy) et Mohamed AASSILA (67-Strasbourg).

L'important est de distinguer les contraintes arithmétiques (question a), qui ne sont pas liées à la taille du tableau, et les limitations, moins immédiates, liées à la taille du tableau (question c). Pour les premières, Dominique DAVION écrit : «Montrer que $a^2 + b^2$ divisible par 3 entraîne a et b divisibles par 3, exigible d'un élève de Math Elem, ne doit pas poser problème à un bon élève de Terminale, mais ne fait pas partie de sa culture».

Pour les secondes, elles exigent quelques tâtonnements. On peut par exemple dessiner le tableau et voir toutes les cases que l'on peut atteindre en partant de (0,0). Mais attention ! il est très facile de se tromper d'une case, ce qui fausse tout. On fait peut-être moins d'erreurs en écrivant numériquement les coordonnées des cases que l'on peut atteindre qu'en les dessinant sur un tableau.

En l'occurrence, pour $r = 97$, le raisonnement prouve qu'avec un maximum de 12 lignes et un nombre pair quelconque de colonnes, on ne pourra jamais aller de A à B. Un autre raisonnement permettrait de prouver qu'avec 12 lignes et 13 ou 15 colonnes, ce n'est pas non plus possible. Par contre, si je dispose d'une treizième ligne, je peux, d'une case de cette treizième ligne, atteindre une case blanche de la quatrième et une case noire de la neuvième, ou bien une case noire de la quatrième et une case blanche de la neuvième. Je peux donc aller de A à B même avec un nombre pair de colonnes, et même si notre tableau n'a qu'un petit nombre de colonnes (13 ou 14 par exemple).

ÉNONCÉ N°2

P est un point à l'intérieur du triangle ABC tel que

$$\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}$$

Soient D et E les centres des cercles inscrits respectivement dans les triangle APB et APC. Montrer que les droites (AP), (BD) et (CE) sont concourantes.

SOLUTION

(BD) et (CE) sont les bissectrices intérieures de $\widehat{ABP}$ et $\widehat{ACP}$ respectivement, elles coupent donc (AP) en K_B et K_C respectivement, vérifiant : $\frac{AK_B}{PK_B} = \frac{AB}{PB}$ et $\frac{AK_C}{PK_C} = \frac{AC}{PC}$

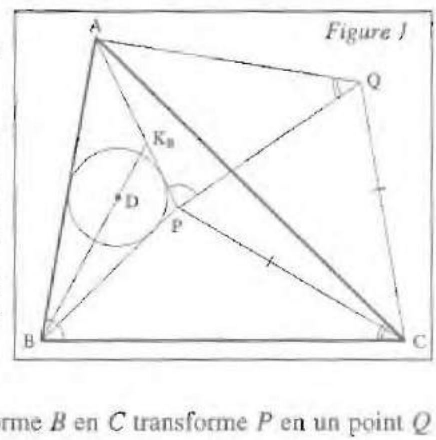


Figure 1

Dire que (AP), (BD) et (CE) sont concourantes revient à dire que $K_B = K_C$, donc que $\frac{AB}{PB} = \frac{AC}{PC}$

La similitude de centre A qui transforme B en C transforme P en un point Q tel que

1) $\frac{AB}{PB} = \frac{AC}{QC}$

2) Les triangles ABC et APQ sont semblables. Cette seconde relation implique : $\widehat{QPC} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}$ et $\widehat{PQC} = \widehat{APB} - \widehat{ACB}$

Etant donné l'hypothèse, le triangle PQC est isocèle et le résultat découle de la relation (1).

REMARQUES

Comme le déplore Johan YEBBOU, à qui je dois la solution ci-dessus, cet énoncé ressemble à l'énoncé de l'Olympiade d'Istanbul (1993) :

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et P un point à l'intérieur de ce triangle vérifiant :

$$\widehat{APB} = \widehat{ACB} + 90° \text{ et } AC.BP = AP.BC.$$

a) Déterminer la valeur du rapport $\dfrac{AB.CP}{AC.BP}$.

b) Montrer que les tangentes, au point C, aux cercles circonscrits aux triangles ACP et BCP sont orthogonales.

La seconde question de cet énoncé d'Istanbul est indépendante : les tangentes en C font le même angle que les tangentes en P, qui font, avec (AP) et (BP) respectivement, les angles $\widehat{ACP}$ et $\widehat{BCP}$. La première hypothèse $\widehat{APB} = \widehat{ACB} + 90°$ suffit donc à prouver le b). Il importe, dans ce genre de problèmes, de discerner le noyau du problème de tout le camouflage qui l'entoure - les tangentes en C de ce problème d'Istanbul ou les cercles inscrits du problème de cette année - éléments qui ne jouent aucun rôle en eux-mêmes et qu'il faut vite écarter pour se concentrer sur le cœur de la démonstration.

Et le cœur de la démonstration de cette année, c'était de déduire une relation entre des *longueurs* d'une relation entre des *angles* : la situation la plus élémentaire où une telle déduction est possible, c'est le triangle isocèle. A Istanbul, on partait de deux relations une sur les angles et une sur les longueurs - pour en déduire une troisième sur les longueurs : là encore, cela fait penser à la résolution des triangles. Dans un cas comme dans l'autre, il serait bon de disposer d'un triangle dont les trois angles soient :

$\widehat{APB} - \widehat{ACB}$, $\widehat{BPC} - \widehat{BAC}$, $\widehat{CPA} - \widehat{CBA}$ (dont la somme vaut bien π)

afin de traduire le plus simplement possible les hypothèses angulaires.

Il existe au moins trois manières de construire un tel triangle : celle que nous avons utilisée ci-dessus et les deux solutions "officielles" proposées par le jury d'Olympiades.

La similitude utilisée ci-dessus (les cinq autres similitudes qui s'en déduisent par permutation de A, B, C, fournissant elles aussi un triangle de mêmes angles, mais moins directement utilisable) vaut également pour l'énoncé d'Istanbul, car : $\frac{PQ}{AP} = \frac{BC}{AB}$ et $\frac{CQ}{AC} = \frac{BP}{AB}$ donc le triangle CPQ est rectangle isocèle, $CP = CQ\sqrt{2} = \frac{AC.BP}{AB}\sqrt{2}$.

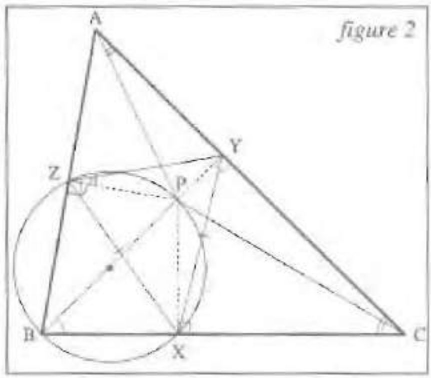


figure 2

La première solution officielle repose que les projections orthogonales X, Y, et Z de P sur (BC), (CA) et (AB). Dans le cercle de diamètre $[BP]$, qui passe par X et Z, il est clair que :

$$XZ = BP \sin \widehat{ABC} = \frac{BP.AC}{2R}$$

en appelant R le rayon du cercle circonscrit à ABC.

En outre,

$$\widehat{XZP} = \widehat{CBP} = \pi - \widehat{CPB} - \widehat{BCP} \quad :$$

on a donc bien, comme souhaité, $\widehat{XZY} = \widehat{CBP} + \widehat{CAP} = \widehat{APB} - \widehat{ACB}$

Si $\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}$, le triangle XYZ est isocèle, d'où :

$$AC.BP = 2R.XZ = 2R.XY = AB.CP.$$

Si, dans le cas d'Istanbul, $\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}$, et $AC.BP = AP.BC$, le triangle XYZ est rectangle isocèle.

La seconde solution officielle fait intervenir le cercle circonscrit à ABC, que les droites (AP), (BP) et (CP) coupent en A', B' et C' respectivement. C'est dans ce cercle circonscrit que l'on démontre les mêmes relations angulaires que ci-dessus, mais c'est la relation métrique de l'inversion (inversion de pôle P laissant invariant le cercle circonscrit) qui fournit les résultats cherchés sur les longueurs. Officiellement, on s'en tient à la puissance $-k$ du point P par rapport au cercle : $k = AP.PA' = BP.PB' = CP.PC'$, pour refaire la démonstration classique de : $A'B' = k\left(\frac{AB}{PA.PB}\right)$, les triangles PAB et $PB'A'$ étant semblables. Là encore, cette méthode s'applique au problème d'Istanbul, car :

$$A'B' = \left(\frac{k}{PA.PB.PC}\right)(AB.CP)$$

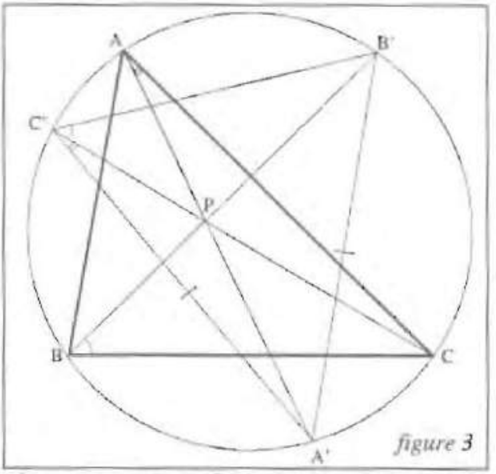


figure 3

Deux lecteurs ont, eux aussi, fait appel à l'inversion. A. MARCOUT (10-Ste Savine) utilise l'inversion ci-dessus de pôle P laissant invariant le cercle circonscrit à ABC (donc transformant A, B et C en A', B' et C'), après avoir prouvé angulairement que le triangle $A'B'C'$ est isocèle. Le cercle (Ω), passant par $A1$ et P et dont le centre est sur (BC), est transformé en le diamètre passant par A' du cercle circonscrit à $PB'C'$, donc en la médiatrice de $[B'C']$. (Ω) est donc le cercle d'Apollonius, lieu des points M tels que $\frac{MB}{MC} = \frac{PB}{PC}$ d'où $\frac{AB}{AC} = \frac{PB}{PC}$.

Charles NOTARI (31-Montaut) utilise, lui, une inversion de pôle A, transformant P, B, C en P_1, B_1, C_1. La relation angulaire donnée comme hypothèse entraîne que les cercles circonscrits à APB et APC font avec le cercle circonscrit à ABC le même angle $\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}$, donc que leurs images, les droites (P_1B_1) et (P_1C_1) se coupent sur la médiatrice de $[B_1C_1]$, qui est l'image du cercle d'Apollonius.

C'est à ce cercle d'Apollonius, lieu des points M vérifiant $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$, qu'ont pensé en premier lieu Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), Dominique DAVION (73-Drumettaz) et moi-même, car si P appartient à ce cercle, il vérifie la relation angulaire donnée en hypothèse : on le prouve en étudiant, par exemple, $\widehat{APC} - \widehat{APB}$. On prouve ensuite que si P n'appartient pas au cercle, il ne vérifie pas ladite relation car un point Q du cercle (l'intersection de (BP) avec le cercle, ou l'intersection avec le cercle de l'arc capable, voyant AB sous l'angle $\widehat{APB}$) la vérifie. Cette démonstration, moins directe et donc moins satisfaisante, s'appuie sur l'idée qu'il est plus facile de prouver une relation sur des angles qu'une relation sur des longueurs.

Rappelons qu'aux Olympiades, la même note est attribuée à toute démonstration juste, quelle que soit son élégance!

ÉNONCÉ 3

Soit $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls. Trouver toutes les applications f de S dans S telles que : $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$ pour tout m et n de S.

SOLUTION

Appelons E le sous-ensemble de S constitué des n tels que $f(n) = n$.

1 - $0 \in E$ car $f(0 + f(0)) = f(f(0)) + f(0)$.

2 - pour tout $n \in S$, $f(n) \in E$ car $f(0 + f(n)) = f(f(0)) + f(n)$.

3 - Si $n \in E$, $\forall m \in S$ $\quad f(n + m) = f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n) = n + f(m)$
et donc : $m \in E \Leftrightarrow n + m \in E$.

La fonction nulle est évidemment solution : $E = \{0\}$. Si f n'est pas la fonction nulle, appelons q le plus petit entier non nul appartenant à E. D'après 3, $2q = q + q$ et, par récurrence, aq ($a \in S$) appartiennent à E. Par contre, aucun autre entier n'appartient à E : si $1 \leqslant b < q$, $b \notin E$ donc, pour tout a, $aq + b \notin E$, d'après 3, mais on aura $f(aq + b) = aq + f(b)$. Et comme $f(b) \in E$, $f(b)$ est multiple de q (éventuellement nul).

Si l'on met à part la fonction nulle et la fonction identique ($q = 1$), toute autre solution est entièrement déterminée par la donnée d'un entier $q \geqslant 2$ et de $(q - 1)$ entiers $k_b \in S$ $(1 \leqslant b \leqslant q - 1)$ en posant : pour tout $a \in S$ et pour tout $b \in \{1, \ldots, q - 1\}$, $f(aq) = aq$ et $f(aq + b) = (a + k_b)q$.

Réciproquement, toute fonction de ce type est solution de notre problème. En effet,

$$\forall n, \ f(n) = \alpha q \quad \text{et} \quad \forall m, \ m = \beta q + \gamma.$$

Si $\gamma = 0$, $\quad f(m + f(n)) = f((\alpha + \beta)q) = (\alpha + \beta)q = f(f(\beta q)) + \alpha q$

Si $1 \leqslant \gamma \leqslant q - 1$,

$$f(m + f(n)) = f((\alpha + \beta)q + \gamma) = (\alpha + \beta + k_\gamma)q$$
$$= f(\beta q + \gamma) + \alpha q = f(f(\beta q + \gamma)) + \alpha q.$$

REMARQUES

C'est cet exercice qui a été le mieux réussi par nos candidats, et j'ai reçu trois solutions de lecteurs (Omarjee MOUBINOOL, Paris, Laurent THIEULIN, 92-Sèvres ; Alain SEBAOUN, 78-Carrières sous Poissy) et une solution fausse. Ce type d'équation fonctionnelle n'est pas inattendu : l'énoncé 250 de ma rubrique *Problèmes* s'inspire d'un problème comparable (Istanbul, 1993), la principale originalité étant le grand nombre de solutions. Après avoir fait le tour de toutes les valeurs particulières ($n = 0$, $m = 0$) et avoir remarqué que $f(f(n)) = f(n)$, il suffit de bien mettre en œuvre les propriétés élémentaires de l'ensemble des entiers naturels (plus petit élément d'un sous-ensemble, récurrence, division euclidienne). D'ailleurs, pourquoi cet ensemble s'appelle-t-il S ? Le fait que 0 puisse être un entier naturel n'a pas fini de poser des problèmes!

ÉNONCÉ 4

Les entiers strictement positifs a et b sont tels que les nombres $15a + 16b$ et $16a - 15b$ sont tous les deux des carrés d'entiers strictement positifs. Trouver la plus petite valeur pouvant être prise par le minimum des ces deux carrés.

SOLUTION

Si $n^2 = 15a + 16b$ et $m^2 = 16a - 15b$ (1)

$n^4 + m^4 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 481(a^2 + b^2)$.

Or $481 = 13 \times 37$.

Donc $n^4 \equiv -m^4 \pmod{13} \Rightarrow (n^4)^3 \equiv -(m^4)^3 \pmod{13}$

et $n^4 \equiv -m^4 \pmod{37} \Rightarrow (n^4)^9 \equiv -(m^4)^9 \pmod{37}$

Comme pour tout nombre premier p et tout entier n non divisible par p, $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, les congruences ci-dessus ne sont possibles que si n et m sont tous deux divisibles et par 13 et par 37, donc par 481.

Le plus petit des deux carrés n^2 et m^2 est donc au moins égal à $(481)^2$, et cette valeur est effectivement atteinte : on peut même avoir $n^2 = m^2 = 481^2$ car le système (1) équivaut alors à

$$\begin{cases} a - 31b = 0 \\ 31a + b = 962 \times 481 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 31 \times 481 \\ b = 481. \end{cases}$$

REMARQUES

Peut-on supposer connue la notion de résidu quadratique ? On voit mal comment s'en sortir autrement, et la solution officielle ainsi que celle de Mohammed AASSILA (67-Strasbourg) présupposent la connaissance du lemme de Fermat, CNS pour que q soit une puissance k-ième modulo p. L'arithmétique est, de fait, une composante fondamentale de la formation du mathématicien, et une bonne pratique des nombres entiers est ici nécessaire pour voir très vite que $481 = 13 \times 37$, sans quoi, rien n'est possible. Notons qu'on peut résoudre le système (1) sans passer par des puissances quatrièmes, c'est ce qu'ont fait Alain SEBAOUN (78-Carrières sous Poissy), Charles NOTARI (31-Montaut) et moi-même (ainsi que Jean-Pierre BOUDINE dans *Quadrature*), sous réserve d'expliciter les résidus quadratiques modulo 13 et modulo 37.

ÉNONCÉ 5

Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe tel que AB soit parallèle à ED, BC soit parallèle à FE et CD soit parallèle à AF.

Soient R_A, R_C et R_E les rayons des cercles circonscrits respectivement aux triangles FAB, BCD, DEF et soit p le périmètre de l'hexagone.

Montrer que $R_A + R_C + R_E \geqslant \dfrac{p}{2}$.

SOLUTION

Appelons

$\alpha = \widehat{A} = \widehat{D}$, $\beta = \widehat{B} = \widehat{E}$, $\gamma = \widehat{C} = \widehat{F}$

les angles de l'hexagone.

Les droites (BC) et (EF) sont distantes de :

$AB.\sin\beta + FA.\sin\gamma$
$= CD.\sin\gamma + DE.\sin\beta$

et cette distance est inférieure ou égale à : $BF = 2R_A \sin\alpha$.

D'où l'on déduit :

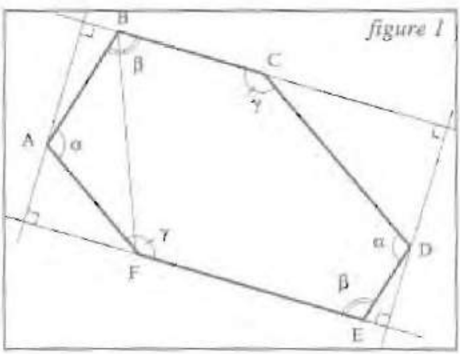


figure 1

$$R_A \geqslant \frac{1}{4}\left(AB\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + FA\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + CD\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + DE\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$$

De même, $$R_C \geqslant \frac{1}{4}\left(CD\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + BC\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + EF\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + FA\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)$$

et $$R_E \geqslant \frac{1}{4}\left(EF\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} + DE\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + AB\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + BC\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)$$

Soit, en additionnant :

$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{1}{4}\left(AB\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) + BC\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right) + \ldots\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(AB + BC + \ldots) = \frac{p}{2}$$

car pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

Notons que l'égalité n'a lieu que si : $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \ldots = 2$ (soit $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$) et si les distances des droites (BC) et (EF), (CD) et (FA), (DE) et (AB) sont ***égales*** à BF, FD, DB respectivement, donc si $AF\cos\gamma = AB\cos\beta$, $ED\cos\alpha = EF\cos\gamma$ et $CB\cos\beta = CD\cos\alpha$, ce qui nécessite que l'hexagone soit régulier (les trois angles de BFD valent $\pi/3$).

Par ailleurs, l'inégalité vaut également pour

$$R_A + R_B + R_C,\ R_B + R_D + R_F,\ R_B + R_C + R_D,\ \text{etc}\ldots$$

REMARQUES

Pourquoi cet énoncé est-il si difficile? J'ai reçu une solution de Mohammed AASSILA (67-Strasbourg), et une tentative de solution ; sans l'aide de la démonstration d'André ANGLES annexée à l'énoncé 127 de notre rubrique *Problèmes*, Jacques BOUTELOUP et moi-même n'en serions sans doute pas venus à bout, et parmi les candidats aux Olympiades, seuls l'ont fait entièrement les deux meilleurs du classement (Ciprian MANOLESCU, Roumanie, 42/42, et YUK SEE KONG, Corée, 39/42), un autre Roumain ($14^{\text{ème}}$ avec 33/42), un Grec et deux Arméniens. Seuls 19 pays sur 75 (25%) ont obtenu au moins 3 points au total de leurs 6 candidats, et la France n'en fait pas partie.

Tout comme la démonstration d'André ANGLES, ce problème présente la même difficulté que le théorème d'ERDÖS-MORDELL, qui a fait sécher bien des matheux : soit un triangle et un point intérieur au triangle. La somme des distances du point aux trois *côtés* du triangle est inférieure ou égale à la demi-somme des distances du point aux trois *sommets*, et l'égalité n'a lieu que si le triangle est équilatéral et le point en son centre. Conjecturé par ERDÖS en 1935, il a été démontré non élémentairement par MORDELL en 1937, puis élémentairement par KAZARINOFF en 1945. Or, ce théorème d'ERDÖS-MORDELL résulte élémentairement du présent problème d'Olympiade : appelons PQR le triangle et I le point intérieur. Les symétriques de I par rapport aux côtés (PQ), (QR) et (RP) seront appelés F, B, D, et les symétriques de I par rapport aux milieux de $[FB]$, $[BD]$ et $[DF]$, respectivement A, C et E. $AFIB$, $BIDC$ et $DIFE$ sont des parallélogrammes : non seulement (AB) est parallèle à (ED), (BC) à (FE) et (CD) à (AF), mais en outre, $AB = ED = IF$, $BC = FE = ID$ et $CD = AF = IB$, ERDÖS-MORDELL correspond donc à un cas particulier de notre problème d'Olympiade. Ce dernier permet d'affirmer :

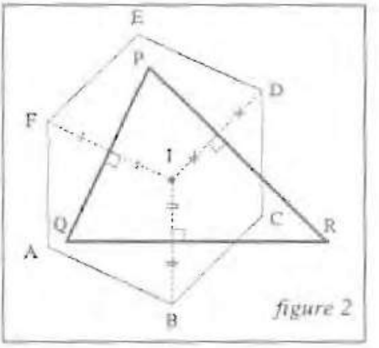


figure 2

$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{p}{2} = IF + ID + IB$, soit deux fois la somme des distances de I aux côtés du triangle PQR. Or, $R_A = IQ$, car les triangles ABF et IFB sont égaux, et comme $QF = QI = QB$, Q est le centre du cercle circonscrit à IFB.

L'égalité n'a lieu que si les angles de l'hexagone sont égaux à $2\pi/3$, donc les angles du triangle à $\pi/3$, et si I est à égale distance des côtés du triangle.

Tout comme la démonstration d'André ANGLES (cf. *Les 200 premiers problèmes de l'A.P.M.E.P.* réunis par Dominique ROUX, vol.II «Géométrie», p.81), notre problème d'Olympiade repose sur une idée rarement exploitée : la notion de «triangle élargi». Ordinairement, en géométrie du triangle, on démontre des relations entre les éléments d'un même triangle, et si la figure comprend plusieurs triangles, c'est *à partir* des relations établies sur ces différents triangles qu'on prouve le résultat final.

Ici, la figure comprend tout un tas de triangles, mais elle n'est pas un tas de triangles. On peut démontrer beaucoup de relations sur tous ces triangles, par exemple : $FA + AB \leqslant 4R_A \cos \alpha/2$, mais on ne peut pas résoudre notre problème *à partir de* ces relations. C'est dès le départ, *avant de* démontrer toute relation qu'il faut faire intervenir des éléments sans rapport avec le triangle étudié - en l'occurrence, faire intervenir les angles β et γ dans l'étude du triangle FAB.

La solution se trouve donc dans les triangles élargis, triangles auxquels on ajoute des éléments de l'environnement sans rapport direct avec le triangle lui-même ; car, quelle que soit la manière de les relier, les informations que l'on peut extraire de l'étude des triangles en eux-mêmes, hors contexte, sont insuffisamment riches pour fournir le résultat souhaité. Peu de problèmes de géométrie du triangle sont dans ce cas.

Par ailleurs, on peut se demander s'il est "normal" que la même démonstration vaille pour $R_A + R_B + R_C$ dans la mesure où considérer les trois triangles FAB, ABC, BCD casse le rôle symétrique joué par les six sommets de l'hexagone, ce qui semble, à tort, un des supports de la solution.

ÉNONCÉ 6

Soient n, p et q des entiers strictement positifs tels que $n > p + q$.

Soient $x_0, x_1, \dots x_n$ des entiers vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $x_0 = x_n = 0$

(ii) pour chaque entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on a soit $x_i - x_{i-1} = p$ soit $x_i - x_{i-1} = -q$.

Montrer qu'il existe un couple d'indices (i, j) avec $i < j$ et $(i, j) \neq (0, n)$ tel que $x_i = x_j$.

SOLUTION

Remarquons tout d'abord qu'on peut supposer p et q premiers entre eux, car si p et q admettent pour P.G.C.D. d, on ne change rien au problème en remplaçant p, q et x_i par : $p' = p/d$, $q' = q/d$ et $x'_i = x_i/d$.

Par ailleurs, il est clair, par récurrence, que $x_i + iq$ est multiple de $(p + q)$, et que, si l'on pose $x_i = (p + q)y_i - iq$, $\quad y_0 = 0$ et

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\quad y_i - y_{i-1}$ vaut 0 ou 1 **(1)**

Comme $x_n = 0$, $(p + q)y_n = nq$: q, premier avec $(p + q)$, divise y_n, donc il existe un entier k tel que $y_n = kq$, $n = k(p + q)$ et $k \geqslant 2$ puisque, par hypothèse, $n > p + q$.

Notre problème sera résolu si l'on trouve un indice j tel que $x_{j+(p+q)} = x_j$, ce qui revient à dire : $y_{j+(p+q)} = y_j + q$. Pour tout j, $0 \leqslant j \leqslant (k - 1)(p + q)$, posons $z_j = y_{j+(p+q)} - y_j$.

Il résulte de (1) que, si $j \geqslant 1$, $|z_j - z_{j-1}| \leqslant 1$.

Or, $z_0 + z_{(p+q)} + \dots + z_{(k-1)(p+q)} = y_n - y_0 = kq$, ce qui prouve que les k entiers $z_{l(p+q)}$ ne peuvent pas être tous strictement inférieurs à q ni tous strictement supérieurs à q : z_i prend au moins une valeur $z_{j1} \geqslant q$ et au moins une valeur $z_{j2} \leqslant q$. Entre j_1 et j_2, z_j varie d'au plus une unité à chaque indice, et pour aller d'une valeur $\geqslant q$ à une valeur $\leqslant q$, il doit obligatoirement passer par la valeur q, ce qui achève la démonstration.

REMARQUES

Cet exercice 6, «considéré par le jury comme très intéressant et très nouveau, était une des cinq propositions de la France» rapporte Claude DESCHAMPS. Rappelons que chaque pays envoie, plusieurs mois à l'avance, des propositions d'exercices. Du 5 au 9 juillet, les chefs des différentes délégations, constitués en jury international, ont choisi, à huis clos, parmi 30 sujets présélectionnés par le pays organisateur, puis les ont traduits pour les proposer aux candidats les 10 et 11 juillet.

Ce résultat repose sur une généralisation aux nombres entiers du théorème des valeurs intermédiaires. L'hypothèse $n > p + q$ est fondamentale car, si $n = p + q$, en posant :

$$x_i = ip \quad \text{pour} \quad i \leqslant q \quad , \quad x_i = (n-i)q \quad \text{pour} \quad i \geqslant q$$

on ne peut avoir $ip = (n - j)q$ que si q, premier avec p, divise i ; il n'existe donc pas de couple d'indices (i, j) tel que $x_i = x_j$, hormis $(0, n)$

Je n'ai reçu qu'une seule solution à cet énoncé : de Jean-Christophe LAUGIER (17 - Rochefort).

A PROPOS DES OLYMPIADES 1995

Peu après la publication des solutions (*Bulletin* 402, février-mars 1996, p. 81), plusieurs réactions me sont parvenues qui méritent d'être mentionnées.

→ Sur l'exercice **1**, Francis DREY (67-Hagueneau) signale que l'axe radical *(XY)* des deux cercles peut être vu comme une ligne de niveau au programme de première S. Les triangles semblables étant moins au goût du jour que les homothéties, il propose une solution voisine de la solution russe : l'homothétie de centre Z transformant D en C transforme A en B, donc l'intersection Q de (AM) et (DN) en l'orthocentre du triangle PCB.

R. RAYNAUD (04-Digne), lui, à l'occasion de la réédition du DUPORCQ, fait remarquer que, de la correspondance homographique liant (BP) et (CP), se déduit une correspondance homographique liant (AQ) et (CQ), qui sont confondues lorsque P est à l'infini.

→ Sur l'exercice **2**, G. LION (Nouméa) signale que la fonction $\dfrac{t^\alpha}{A-t} = f(t)$

étant convexe pour $\alpha \geq 1$, $0 < t < A$, on a : $\dfrac{1}{3}\left(f(x) + f(y) + f(z)\right) \geqslant f\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)$,

et ce, même si $A = x + y + z$ ($\dfrac{A}{3} \geqslant (xyz)^{1/3} = 1$) «Le programme de Terminale S (Tronc commun) accorde une place considérable aux fonctions et au calcul barycentrique, écrit-il. Comment expliquer que la démonstration d'inégalités de convexité, qui conjugue harmonieusement ces deux sujets, n'ait jamais trouvé la moindre place dans les sujets du bac ?»

Il ajoute, à propos de l'exercice **5** : «malgré tout mon respect pour Ptolémée et l'inversion, la méthode mise en œuvre dans la "propriété préliminaire" permet de démontrer rapidement que, si ABC est équilatéral, pour tout point P du plan, $PC \leqslant PA + PB$: la rotation de centre A qui mène B en C transforme P en Q vérifiant $PC \leqslant PQ + QC = PA + PB$». Si, dans le cas où ABC n'est pas équilatéral, on considère la similitude de centre A transformant B en C et P en Q (cf. énoncé **2** de 1996), cette même démonstration montre que $PC \leqslant BC.\dfrac{AP}{AB} + BP.\dfrac{AC}{AB}$, d'où le théorème de Ptolémée, l'égalité ayant lieu si et seulement si $\widehat{APC} + \widehat{ABC} = \pi$.

→ Quant à l'énoncé **6** de 1995, G. Lion constate que la solution est «fondée sur la définition d'une *opération* du groupe cyclique à p éléments dans l'ensemble des parties $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ de cardinal p. Il devient alors évident que pour cette opération, les orbites sont de cardinal 1 ou p. Mais cette évidence est difficile à traduire lorsqu'on s'interdit l'usage des outils non élémentaires ; à ce titre, cet exercice semble mal venu pour les Olympiades».

Hubert Delange (91-Orsay), quant à lui, par une méthode apparentée à la démonstration italienne (polynômes cyclotomiques), exprime plus généralement le nombre $N_\alpha(k)$ de sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, mp\}$ ayant k éléments et tels que la somme de leurs éléments soit $\equiv \alpha$ (mod. p), et ce, pour tout entier $m > 1$, tout entier $p > 1$, tout α entier $(0 \leqslant \alpha \leqslant p-1)$ et tout entier k $(1 \leqslant k \leqslant mp)$: $N_\alpha(k) = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{d \mid (p,k)} (-1)^{k + k/d}\, \mathrm{C}_{mp/d}^{k/d}\, C_d(\alpha)$

où $C_d(\alpha)$ est la somme de Ramanujan $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq h \leq d \\ (h,d)=1}} e^{2i\pi h\alpha/d}$.

Si p est premier, le PGCD (p,k) étant soit 1 soit p, le résultat se simplifie :

si $k \not\equiv 0$ (mod.p), pour chaque α, $N_\alpha(k) = \dfrac{1}{p}\, \mathrm{C}_{mp}^{k}$

si $k = np$:

$$\text{pour } \alpha = 0,\ N_\alpha(k) = \frac{1}{p}\left(\mathrm{C}_{mp}^{k} + \varepsilon\,(p-1)\,\mathrm{C}_{m}^{n}\right)$$

$$\text{pour } \alpha \neq 0,\ N_\alpha(k) = \frac{1}{p}\left(\mathrm{C}_{mp}^{k} - \varepsilon\,\mathrm{C}_{m}^{n}\right)$$

avec $\varepsilon = 1$ si p impair, $\varepsilon = (-1)^n$ si $p = 2$.