Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de «beaux problèmes»... si possible trouver des solutions et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions. Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés.

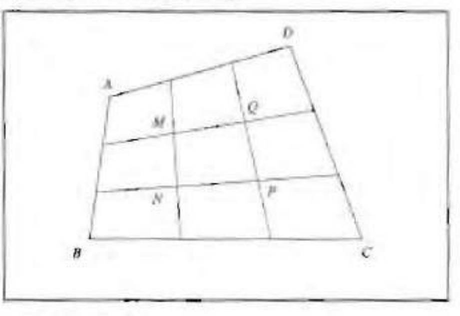
Enoncés, réponses et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur des feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu
75010 PARIS

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N°264 (Gilbert GRIBONVAL, 91 - Palaiseau)

Le quadrilatère $ABCD$ est quelconque. Chacun de ses côtés a été partagé en trois parties égales. Certains disent que l'aire du quadrilatère $ABCD$ est neuf fois celle du quadrilatère $MNPQ$. Et vous, qu'en pensez-vous ?



ÉNONCÉ N°265 (François LO JACOMO, Paris)

Soit ABC un triangle dont les angles seront notés $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$. Soient O et R le centre et le rayon de son cercle circonscrit, H son orthocentre, et A', B',

C' les symétrique de A, B, C respectivement par rapport à la droite d'Euler (OH).

Montrer que $AB'.OH = A'B.OH = 2R^2\left|\sin\left(\widehat{B}-\widehat{A}\right)\right|$.

ÉNONCÉ N°266 (Nahum-Patrick BENMOUSSA, Sarcelles, d'après oral Polytechnique)

A tout entier $n \geqslant 2$, on associe son plus grand facteur premier $p(n)$.

Pour α réel, étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n\,p^{\alpha}(n)}$.

SOLUTIONS

Nous poursuivons, dans ce numéro, la correction de l'énoncé n°245 de François LO JACOMO.
La première partie de cette correction a été publiée dans le numéro 408, de la page 57 à la page 79.

Théorème : quel que soit le nombre complexe w donné, l'équation **(10)** $\dfrac{u^2}{1-2\overline{u}} = w$ admet au plus quatre racines distinctes ; elle admet précisément quatre racines distinctes si et seulement si w est le pivot d'un triangle, ces quatre racines étant les affixes des centres du cercle inscrit et des trois cercles exinscrits dans ledit triangle.

Effectivement, nous avons là un quatuor inséparable : algébriquement, par notre méthode, les centres des cercles exinscrits ont les mêmes propriétés que le centre du cercle inscrit. D'ailleurs, pour mettre en relief cette parenté, ces quatre cercles sont également appelés "cercles tritangents". Pour commencer, comme $AI_A = 4R\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$, il suffit de changer quelques signes dans la démonstration ci-dessus pour prouver que l'affixe u_A de I_A vérifie aussi : $\dfrac{u_A^2}{1-2\overline{u_A}} = w$, tout comme u_B et u_C.

Mais pourquoi ne peut-il y avoir plus de quatre racines?
Tout simplement parce que

$$w = \frac{u^2}{1-2\overline{u}} \quad\Rightarrow\quad \left(w-u^2\right)^2 = \left(\frac{2u^2\overline{u}}{1-2\overline{u}}\right)^2 = 4w^2\,\overline{w}\,(1-2u) \qquad \mathbf{(11)}$$

u est donc racine de l'équation *algébrique*:

$$\boxed{P_5(z) = z^4 - 2wz^2 + 8w^2\bar{w}z + w^2(1 - 4\bar{w}) = 0}$$

qui, elle, admet *toujours* quatre racines, distinctes ou non. Nous appellerons u_1, u_2, u_3 et u_4 ces quatre racines et s_5, t_5, p_5, q_5 leurs polynômes symétriques élémentaires : $P_5(z) = z^4 - s_5z^3 + t_5z^2 - p_5z + q_5$.

Remarquons, au passage, que $s_5 = 0$, ce qui se traduit, dans le cas où u_1, u_2, u_3 et u_4 sont les affixes de I, I_A, I_B et I_C par le fait que ces quatre points ont pour isobarycentre O.

Mais réciproquement, les racines de P_5 vérifient-elles l'équation (**10**) ? Pas obligatoirement, ce qui explique que cette équation (**10**) n'ait pas nécessairement quatre racines.

L'idée est d'associer à toute racine u de P_5 : $u' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\bar{u}^2}{2\bar{w}}$ qui est aussi racine de P_5 car $u'^2 = \left(\dfrac{\bar{w} - \bar{u}^2}{2\bar{w}}\right)^2 = w(1 - 2\bar{u})$ d'après (**11**) donc

$$\left(u'^2 - w\right)^2 = 4w^2\bar{u}^2 = 4w^2\bar{w}(1 - 2u') .$$

Par ailleurs, cette transformation est involutive sur l'ensemble des racines : on a $u'^2 = w(1 - 2\bar{u})$ tout comme : $u^2 = w\left(1 - 2\overline{u'}\right)$.

Dès lors, soit chacune des racines de P_5, distinctes ou non, est sa propre image par cette involution :

$$u_1^2 = w(1 - 2\bar{u}_1) ;\ u_2^2 = w(1 - 2\bar{u}_2) ; u_3^2 = w(1 - 2\bar{u}_3)$$

et $u_4^2 = w(1 - 2\bar{u}_4)$ auquel cas l'équation (**10**) admet quatre racines, distinctes ou non.

Soit l'une d'elle, u_1 par exemple, n'est pas sa propre image : c'est par exemple l'image de $u_2 \neq u_1$, on a donc $u_1^2 = w(1 - 2\bar{u}_2)$ et $u_2^2 = w(1 - 2\bar{u}_1)$. Dès lors, le fait que P_5 ne puisse pas être un carré (si $w \neq 0$) et le fait que $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 4w$ interdisent que l'on ait u_3 ou u_4 égal à u_1 ou à u_2.

On peut donc avoir soit : $u_3^2 = w(1 - 2\bar{u}_3)$ et $u_4^2 = w(1 - 2\bar{u}_4)$, auquel cas l'équation (**10**) admet deux racines distinctes ou non, soit :

$u_3^2 = w(1-2\overline{u}_4)$ et $u_4^2 = w(1-2\overline{u}_3)$ avec $u_3 \neq u_4$, et l'équation (**10**) n'admet pas de racine.

Mais ce dernier cas ne se produit jamais : l'équation (**10**) admet toujours deux ou quatre racines, distinctes ou non. En effet, si deux racines s'échangent :

$$\begin{cases} u_1^2 = w(1-2\overline{u}_2) \\ u_2^2 = w(1-2\overline{u}_1) \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad u_1^2 - u_2^2 = 2w(\overline{u}_1 - \overline{u}_2)$$

et $\dfrac{(u_1^2-u_2^2)(u_1-u_2)}{w} = \dfrac{(u_1+u_2)(u_1-u_2)^2}{w}$ est un réel *positif*.

Si, par contre, les racines u_1 et u_2 sont toutes deux invariantes :

$$\begin{cases} u_1^2 = w(1-2\overline{u}_1) \\ u_2^2 = w(1-2\overline{u}_2) \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad u_1^2 - u_2^2 = -2w(\overline{u}_1 - \overline{u}_2)$$

et $\dfrac{(u_1+u_2)(u_1-u_2)^2}{w}$ est un réel *négatif*.

Or, comme
$$(u_1+u_2) = -(u_3+u_4)$$
$$(u_1+u_2)(u_1-u_2)^2 = (u_1+u_2)^3 + 4u_1u_2(u_3+u_4)$$
$$(u_3+u_4)(u_3-u_4)^2 = (u_3+u_4)^3 + 4u_3u_4(u_1+u_2)$$

et la somme vaut $4p_5 = -32\,w^2\overline{w}$. Si u_1 et u_2 s'échangeaient et u_3, u_4 également, $\dfrac{(u_1+u_2)(u_1-u_2)^2}{w} + \dfrac{(u_3+u_4)(u_3-u_4)^2}{w}$ serait un réel positif, ce qui n'est manifestement pas le cas. Pour la même raison, on remarque que si u_1 et u_2 s'échangent, on ne peut pas avoir $u_3 = u_4$. Donc, en prenant soin d'étudier séparément les cas où P_5 admet une racine triple ou quadruple ($w = 0$ ou $w = 1/3$), on peut affirmer que si P_5 admet une racine double, triple ou quadruple, toutes ses racines sont solution de l'équation (**10**).

Remarquons au passage que si u_1 et u_2 s'échangent ou s'ils sont tous deux invariants, $|u_1+u_2| = |2w|$ car $|\overline{u}_1 - \overline{u}_2| = |u_1 - u_2|$. Dès lors, si l'équation (**10**) admet quatre racines distinctes, deux quelconques d'entre elles ont leur milieu sur le cercle de centre O et de rayon R, ce qui rappelle une propriété connue. Réciproquement, si deux quelconques des quatre racines de P_5, que l'on supposera distinctes, ont leur milieu sur un même cercle, ces quatre racines sont invariantes par notre involution, donc l'équation (**10**) admet quatre racines distinctes. Géométriquement, il est clair que, par exemple, les milieux de $[I_1I_2]$, $[I_2I_3]$, $[I_3I_4]$ et $[I_4I_1]$ sont les sommets d'un parallélogramme de côtés parallèles à (I_1I_3) et (I_2I_4), ils sont donc sur un même cercle si et seulement si (I_1I_3) et (I_2I_4) sont perpendiculaires. Cela peut aussi se prouver algébriquement, en écrivant que :

$$\left|\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{u_3+u_4}{2}\right|^2=\left|\frac{u_1+u_4}{2}+\frac{u_2+u_3}{2}\right|^2,$$

donc

$$|u_1+u_2|^2+|u_3+u_4|^2=|u_1+u_4|^2+|u_2+u_3|^2 \Leftrightarrow \left(\frac{u_1-u_3}{u_2-u_4}\right)+\left(\frac{\overline{u}_1-\overline{u}_3}{\overline{u}_2-\overline{u}_4}\right)=0$$

Or, si u_1, u_2, u_3, u_4 n'étaient pas tous quatre invariants, supposons que u_1 et u_2 s'échangent, on aurait :

$$\left[\frac{(u_1+u_2)(u_1-u_2)^2}{w}\right]\left[\frac{(u_3+u_4)(u_3-u_4)^2}{w}\right]\in \mathbb{R}^-.$$

Comme $u_1+u_2=-(u_3+u_4)$, on en déduirait que $\dfrac{(u_1+u_2)(u_1-u_2)(u_3-u_4)}{w}$

est réel, et par suite que $\dfrac{u_3-u_4}{u_1-u_2}$ serait lui aussi réel, I_4 serait donc sur la *parallèle* à (I_1I_2) passant par I_3, et non sur la hauteur. Alors qu'un calcul analogue, lorsque toutes les racines sont invariantes, montre que : $\dfrac{u_3-u_4}{u_1-u_2}$ est alors imaginaire pur, comme prévu.

Comment voir si les quatre racines ont leurs six milieux sur un même cercle ? En déterminant l'équation admettant pour racines les six sommes : u_1+u_2, u_1+u_3, u_1+u_4, u_2+u_3, u_3+u_4 et u_2+u_4. Ce n'est pas si difficile, sachant que $s_5=0$, $p_5=-2w$ et $q_5=-8w^2\overline{w}$, on peut écrire par exemple :

$$(u_1+u_2)+(u_1+u_3)+(u_1+u_4)=3u_1+(u_2+u_3+u_4)=2u_1$$

$$\begin{aligned}(u_1+u_2)(u_1+u_3)&+(u_1+u_3)(u_1+u_4)+(u_1+u_4)(u_1+u_2)\\&=3u_1^2+2u_1(u_2+u_3+u_4)+(u_2u_3+u_3u_4+u_4u_2)\\&=2u_1^2-2w\end{aligned}$$

et $$\begin{aligned}&(u_1+u_2)(u_1+u_3)(u_1+u_4)=\\&=u_1^3+u_1^2(u_2+u_3+u_4)+u_1(u_2u_3+u_3u_4+u_4u_2)+u_2u_3u_4\\&=-8w^2\overline{w}\end{aligned}$$

Donc $u_1 + u_2$, $u_1 + u_3$, $u_1 + u_4$, sont les racines de :

$$P_6(z) = z^3 - 2u_1 z^2 + (2u_1^2 - 2w)z + 8w^2\overline{w}$$

alors que $u_3 + u_4 = -(u_1 + u_2)$, $u_2 + u_4 = -(u_1 + u_3)$ et $u_2 + u_3 = -(u_1 + u_4)$ sont eux racines de $P_6(-z)$. Le polynôme cherché est donc :

$$P_6(z)P_6(-z) = z^6 - 4wz^4 + 16w^2\overline{w}z^2 - 64w^4\overline{w}^2$$

compte tenu que, u_1 étant racine de P_5, il vérifie

$$(u_1^2 - w)^2 + 8w^2\overline{w}u_1 = 4w^2\overline{w}.$$

Or, ce polynôme peut encore s'écrire :

$$P_6(z)P_6(-z) = 64w^3\overline{P_0}\left(\frac{z^2}{4w}\right) \quad \textbf{(12)}$$

et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il admette six racines de même module est que $\overline{P_0}$ ait aussi des racines de même module, donc que $\overline{w}$ (et, par symétrie w) soit extérieur ou sur le limaçon de Pascal ($\mathcal{L}$). Tout le raisonnement réside dans le fait que, dans la relation **(12)**, le w paramètre de P_0 est *le même* que le w paramètre de P_5 donc de P_6.

Qu'en est-il des cas où P_5 admet une racine double ? D'après ce que nous venons de voir, P_5 admet une racine double si et seulement si $\overline{P_0}$ admet lui aussi une racine double, donc si et seulement si le paramètre $\overline{w}$ (donc w) est sur ($\mathcal{L}$). Cela achève la démonstration du théorème annoncé.

En outre, si P_5 admet v pour racine double, on doit avoir la décomposition :

$$P_5(z) = (z^5 - 2vz + v^2)(z^2 + 2vz + 3v^2 - 2w)$$

obtenue en identifiant les coefficients de z^4, z^3 et z^2. Le coefficient constant :

$$w^2(1 - u\overline{w}) = v^2(3v^2 - 2w).$$

Mais on a vu que la racine double v est racine de l'équation **(10)** : $v^2 = w(1 - 2\overline{v})$, d'où : $1 - 4\overline{w} = (1 - 2\overline{v})(1 - 6\overline{v}) \Rightarrow w = v(2 - 3v)$

En rapprochant ceci de : $w = \dfrac{v^2}{1 - 2\overline{v}}$, on en déduit que la racine double appartient au cercle (Γ) : $|3v - 2| = 1$.

Réciproquement, si $v = \dfrac{2 - e^{it}}{3}$, $w = e^{it}\left(\dfrac{2 - e^{it}}{3}\right)$, W est sur ($\mathcal{L}$) et v est bien racine double de :

$$P_5(z) = \left(z^2 - 2vz + v^2\right)\left(z^2 + 2vz + \left(2 - 3e^{it}\right)v\right).$$

Les autres racines sont :

$$u = -v \pm 2|v|e^{it/2} = -1 + \frac{2e^{it/2}}{3}\left(\cos\frac{t}{2} \pm \left|2 - e^{it}\right|\right)$$

En paramétrant : $u = -1 + \frac{2}{3}\rho e^{i\theta}$, elles appartiennent à la courbe :

$$(\rho - \cos\theta)^2 = 1 + 8\sin^2\theta$$

C'est Jacques BOUTELOUP qui m'a fait remarquer que cette quartique bicirculaire ($\mathcal{Q}$), étant donné son point de rebroussement H', était l'inverse d'une parabole ; c'est l'inverse de la parabole de foyer G et de sommet O' par l'inversion de centre H' qui transforme O en H. En effet, si l'on pose $\rho e^{i\theta} = x + iy$, l'équation ci-dessus devient :

$$1 - \frac{2x}{x^2 + y^2} - 9\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 = 0$$

et l'inversion transforme (x, y) en $\left(\frac{9}{2}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right), \frac{9}{2}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right)$.

D'ailleurs, ($\mathcal{Q}$) et ($\mathcal{L}$) sont les deux seules courbes passant par G dont l'inverse, par une inversion transformant O en H, soit la parabole de foyer G et de sommet O'. Tout comme ($\mathcal{L}$) (et ce n'est pas un hasard !), elle est tangente à la médiatrice (Δ) de $[OH]$, mais en deux points J_3 et J_4 tels que $\widehat{J_4OH} = \widehat{HOJ_3} = \frac{\pi}{3}$.

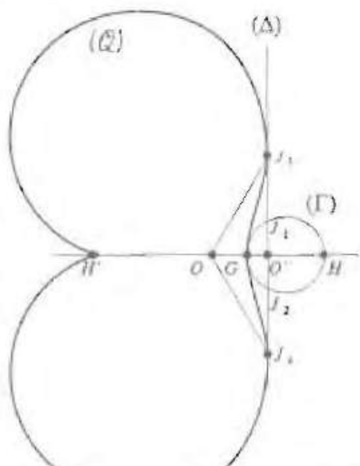


figure 7

Quand I se trouve en J_3, la racine double est en J_2 et W en J_1 et quand P est en J_4, la racine double est en J_1 et W en J_2

Comme W est sur ($\mathcal{L}$) si et seulement si I est sur (Γ) ou sur ($\mathcal{Q}$), on s'attend à trouver là la frontière de l'ensemble des points I tels qu'il existe un triangle ABC admettant I pour centre d'un des cercles inscrit ou exinscrits et l'inversion que je viens de citer permet de décrire cet ensemble au moyen d'une parabole, dans un nouveau repère où I et H' (le pôle de l'inversion) sont fixés et où les autres points, notamment G, sont variables : en effet, si I a pour affixe $x + iy$ dans le plan des complexes où H' et G ont pour affixes 0 et 2, G a pour affixe $\frac{2}{x+iy}$ dans le plan des complexes où H' et I ont pour affixes 0 et 1. D'où la réponse proposée en tête de l'article, qui évite de faire appel à une équation de quelque forme qu'elle soit.

Néanmoins, un équationniste pointilleux ne saurait se satisfaire d'une argumentation topologique sommaire. Il est, sinon simple, du moins possible, de substituer $w = \frac{u^2}{1 - 2\overline{u}}$ dans une des équations **(6)**, à condition de paramétrer intelligemment. Par exemple, une droite passant par G coupera la frontière de l'ensemble cherché en deux points doubles (G et un autre point du cercle (Γ)), et deux à quatre points simples appartenant à $(\mathcal{Q})$, dont le point G. On doit retrouver ainsi l'équation de $(\mathcal{Q})$.

De fait, en posant $u = \frac{1 + 2\rho e^{i\varphi}}{3}$ (le paramètre ρ n'a aucun rapport avec ceux précédemment utilisés, mais je suis à court de notations!), on a :

$$\left(9R^2 - 1\right)^2 - 4\left|3w - 1\right|^2 =$$

$$= \frac{\left(9u^2\overline{u}^2 - (1-2u)(1-2\overline{u})\right)^2 - 4\left|3u^2 - (1-2\overline{u})\right|^2\left|1-2u\right|^2}{\left|1-2u\right|^4}$$

$$= \frac{64\rho^2}{81\left|1-2u\right|^4}\Big[\left(2\rho^3 + 4\rho^2\cos\varphi + \rho\cos 2\varphi + 2\cos\varphi\right)^2 -$$

$$\left(r^2 + 4\rho\cos\varphi\cos 2\varphi + 4\cos^2\varphi\right)\left(16\rho^2 - 8\rho\cos\varphi + 1\right)\Big]$$

$$= \frac{256\rho^2(\rho - \cos\varphi)^2}{81\left|1-2u\right|^4}\left[\rho^4 + 6\rho^3\cos\varphi + \left(17\cos^2\varphi - 5\right)\rho^2 + 8\rho\cos\varphi\right] \quad \textbf{(13)}$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc que le terme

$$\Phi = \rho^4 + 6\rho^3 \cos\varphi + (17\cos^2\varphi - 5)\rho^2 + 8\rho\cos\varphi$$

soit strictement positif. Or $\Phi = 0$ doit correspondre à l'équation de $(\mathcal{Q})$ dans notre repère centré en G.

Il serait bon, dès lors , de recentrer le repère en H', en posant :

$$x : 2 + \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

$$\Phi = (\rho^2 + 2\rho\cos\varphi)(\rho^2 + 4\rho\cos\varphi + 4) - 9\rho^2\sin^2\varphi$$
$$= (x^2 + y^2 - 2x)(x^2 + y^2) - 9y^2$$

pour écrire la condition sous la forme attendue :

$$\left(\frac{3y}{x^2 + y^2}\right)^2 < 1 - \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

Sous réserve que, là, nous ne différencions pas le cas où I est centre du cercle inscrit de celui où il est centre d'un cercle exinscrit. Comment faire la différence?

Tout simplement en remarquant que, parmi les quatre centres des cercles inscrit et exinscrits, le centre du cercle inscrit est le seul qui soit intérieur au cercle circonscrit, donc le seul vérifiant : $|u| < R = |w|$, soit $\left|\frac{u}{1 - 2\bar{u}}\right| > 1$.

Dans la mesure où le domaine ainsi défini (l'intérieur de (Γ) à l'exclusion de O') est tout entier extérieur à $(\mathcal{Q})$, on en déduit les deux conditions annoncées. On comprend mieux dès lors pourquoi (Γ) est l'ensemble des points doubles possibles de l'équation **(10)** : lorsque deux sommets A et B du triangle viennent se confondre sur (Γ), le centre I du cercle inscrit et le centre I_C d'un des cercles exinscrits viennent eux aussi se confondre avec $A = B$, I venant de l'intérieur de (Γ) et I_C de l'extérieur. I_A et I_B, eux, s'arrêteront sur la quartique $(\mathcal{Q})$; ils sont sur la bissectrice extérieure de l'angle nul, laquelle passe par H' car C est sur le cercle de diamètre $H'G$ (le milieu de $[I_A I_B]$ est le milieu de $[H'C]$). Cela explique le rôle joué par H' dans l'étude de $(\mathcal{Q})$.

Il est clair, géométriquement, que si quatre points forment un quadrangle orthocentrique, un et un seul d'entre eux est intérieur au triangle formé par les trois autres, donc au cercle d'Euler du quadrangle. En d'autres termes, la condition $|u| < R$ caractérise bien une et une seule des quatre racines de l'équation **(10)**. Mais peut-on le prouver équationnellement ?

$$\sum_{i<j} |u_i + u_j|^2 = \left|\sum u_i\right|^2 + 2\sum |u_i|^2$$

Comme $\sum u_i = 0$ et $|u_i + u_j| = 2R$ pour tout couple (i, j), on a donc le résultat classique :

$$\sum |u_i|^2 = OI^2 + OI_A^2 + OI_B^2 + OI_C^2 = 12R^2$$

Par ailleurs, $\dfrac{u_i\overline{u}_i}{w\overline{w}} = \dfrac{(1-2\overline{u}_i)(1-2u_i)}{u_i\overline{u}_i}$, donc

$$16 - 2\sum\left(\frac{1}{u_i} + \frac{1}{\overline{u}_i}\right) + \sum \frac{1}{u_i\overline{u}_i} = 12.$$

Comme $\displaystyle\sum \frac{1}{u_i} = \frac{p_5}{q_5} = 2 + \frac{2}{4\overline{w}-1}$ on a : $\displaystyle\sum \frac{1}{u_i\overline{u}_i} = \frac{4}{4\overline{w}-1} + \frac{4}{4w-1} + 4.$

On sait, en outre, que $\prod u_i = q_5$ donc $\prod u_i\,\overline{u}_i = q_5\overline{q}_5 = (4w-1)(4\overline{w}-1)R^4$

et $\qquad \dfrac{(u_i\overline{u}_i)^2}{w\overline{w}} = (1-2\overline{u}_i)(1-2u_i) \Rightarrow \sum (u_i\overline{u}_i)^2 = 48R^4 + 4R^2$

Les $u_i\overline{u}_i = OI_i^2$ sont donc racines du polynôme :

$P_7(z) = z^4 - 12R^2z^3 + (48R^4 - 2R^2)z^2 - (64R^6 - 4R^4)z + (4w-1)(4\overline{w}-1)R^4$

Si je pose $u_i\overline{u}_i = R^2 + 2Rr_i$, les r_i sont, eux, racines du polynôme

$$P_7(R^2 + 2Rz) = 16R^4\left(z^4 - 4Rz^3 + \left(\frac{9R^2-1}{2}\right)z^2 - \frac{27R^4 - 18R^2 + 4(w+\overline{w}) - 1}{16}\right)$$

Or, w est pivot si et seulement si $27R^4 - 18R^2 + 4(w+\overline{w}) - 1 > 0$ auquel cas le produit des r_i est strictement négatif : un ou trois des r_i est négatif, donc, un ou trois des $|u_i|$ est inférieur à R. Il ne peut pas y en avoir trois car, du fait que $\sum u_i = 0$, le quatrième aurait un module inférieur à $3R$ et on ne pourrait pas avoir $\sum |u_i|^2 = 12R^2$. D'ailleurs, si deux racines étaient intérieures au cercle de centre O et de rayon R, on voit mal comment leur milieu serait sur le cercle. Dès lors, si l'équation $\dfrac{u^2}{1-2\overline{u}} = w$ admet quatre racines distinctes, une et une seule d'entre elles a un module strictement inférieur à $R = |w|$, donc une et une seule est intérieure à (Γ).

Mais on a redémontré au passage tout un tas de relations classiques sur les rayons des cercles inscrits et exinscrits, celles que cite TERQUEM, notamment :

$r_A + r_B + r_C - r = 4R$

$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{1}{r}$

$r_A\, r_B\, r_C\, r = S^2,$

compte tenu de la relation (**8**).

Les deux cas particuliers

Et les cas particuliers où le triangle est constructible à la règle et au compas ? Un jeu d'enfant ! Ce sont les cas où le polynôme P_0 admet une racine évidente…

➪ (c) Si u est réel (premier cas particulier), $\frac{u^2}{1-2\bar{u}} = w$ est lui aussi réel, donc w est racine évidente de $P_0(z) = (z - w)\,(z^2 + (w-1)z + w^2)$ les autres racines étant :

$$\frac{1-w}{2} \pm \frac{i\,\sqrt{(3w-1)(1+w)}}{2}$$

et le triangle est isocèle, sous réserve que I soit extérieur à $[H'G\,]$, sinon les trois racines sont réelles. Il suffit donc de construire w, et la construction est la même que I soit centre du cercle inscrit ou d'un cercle exinscrit, si ce n'est que, dans ce second cas, K_0 est extérieur au cercle de centre O passant par I, il faut donc mener de K_0 deux tangentes à ce cercle pour trouver le pied de la polaire J_A. Si I est sur $]H'G\,[$, la médiatrice de $[HJ_A\,]$ ne coupe pas le cercle de centre O et de rayon R.

Tous les autres polynômes se simplifient, par exemple :

$$P_3(z) = (z - w(3w-1))^2\,(z - (w+1)\,(3w-1))$$

$$P_5(z) = (z^2 + 2wz - w)\,(z^2 - 2wz - w + 4w^2)$$

L'étude de P_5 est intéressante, car elle illustre, dans ce cas particulier, ce qui se passe si w est à l'intérieur de $(\mathscr{L})$.

Si $-1 < w < 0$, les racines de $z^2 + 2wz - w$ sont *complexes* conjuguées (sur le cercle de diamètre $[OH\,]$), elles s'échangent ($z^2 = w(1-2z\,)$), et ce sont les racines de $z^2 - 2wz - w + 4w^2$, elles aussi complexes conjuguées (d'où le parallélisme) qui sont solutions de $\frac{u^2}{1-2\bar{u}} = w$ (car $z + \bar{z} = 2w$ et $z^2 = w\,(1 - 2\,(2w - z))$). Une fois passée la racine quadruple pour $w = 0$, les quatre racines deviennent *réelles* (parallélisme) et les relations ci-dessus prouvent que, cette fois-ci, ce sont les racines de $z^2 + 2wz - w$ qui sont racines de $\frac{u^2}{1-2\overline{u}} = w$ alors que les daux autres s'échangent, elles sortent même de la quartique ($\mathcal{Q}$) pour décrire l'intervalle $\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$ et se rejoindre en G pour $w = 1/3$, d'où elles repartent, complexes conjuguées, donc solutions de $\frac{u^2}{1-2\overline{u}} = w$. Pour w intérieur à ($\mathcal{L}$), l'équation $\frac{u^2}{1-2\overline{u}} = w$ admet au plus deux racines distinctes.

⇨ Si I est sur (Δ) (second cas particulier), $u + \overline{u} = 1$ donc $w = \frac{u^2}{u - \overline{u}}$ vérifie : $w + \overline{w} = u + \overline{u} = 1$. C'est le cas où $\overline{w}$ est racine évidente, $P_0(z) = (z - \overline{w})(z^2 - wz + w^2)$ les autres racines sont donc : $-wj$ et $-wj^2$ $\left(j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$, elles sont sur les droites (HJ_1) et (HJ_2).

En outre, $w - u = \frac{u\overline{u}}{u - \overline{u}}$ a, lui aussi, pour module R, ce qui justifie notre construction du cercle circonscrit à OIH. $w - \beta = w + wj$ et $w - \gamma$ ont aussi pour module R, donc B et C sont eux aussi sur ce cercle. La construction est possible pour tout I de (Δ) si ce n'est qu'aux points J_1 et J_2 où (Δ) coupe (Γ), $A = B = I = I_C$, I_A est sur (Δ) et sur la perpendiculaire en O à (OA) puisque le cercle de diamètre $[II_A]$ passe par O, donc en J_4 si I est en J_1, ou en J_3 si I est en J_2. On explique ainsi que ($\mathcal{L}$) et ($\mathcal{Q}$) soient tangents à (Δ), en J_1, J_2 et J_3, J_4 respectivement. B et C décrivent les droites (HJ_1) et (HJ_2) tout entières si I parcourt (Δ), mais si I parcourt $]J_1J_2[$, B et C ne peuvent pas être sur les segments pointillés : $0 \leqslant \beta + \overline{\beta} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \gamma + \overline{\gamma} \leqslant 1$ de la figure (2) tout comme A ne peut pas être sur $[J_1J_2]$.

Les équations se simplifient là encore :

$$P_3(z) = (z - 3R^2)\,(z^2 - (6R^2 - 1)z + (3R^2 - 1)^2)$$

$$P_5(z) = (z^2 - 2wz + w)\,(z^2 + 2wz + w(1 - 4w)).$$

Sur le polynôme P_3, on voit que les côtés du triangle ont pour longueur

$R\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}\sqrt{R^2-\frac{1}{4}} \pm \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R + r\sqrt{3} \pm \frac{1}{2}$, compte tenu que $\sqrt{R^2-\frac{1}{4}} = J_AO' = R - O'I$. D'ailleurs, puisque $\alpha = \overline{w}$, $\beta = -wj$ et $\gamma = -wj^2$ sont connus, il suffisait d'utiliser directement : $a^2 = 3R^2 - 1 + (\alpha + \overline{\alpha})$ pour arriver au même résultat. Le fait que l'un des côtés ait pour longueur $R\sqrt{3}$ provient du fait que l'angle en A vaut $\pi/3$ dès lors que A appartient à la médiatrice de $[OH]$, puisque, dans tous les cas, $AH = 2R\cos\widehat{A}$. Comme (AI) est bissectrice de $\widehat{OAH}$, rien d'étonnant que I soit lui aussi sur (Δ) si l'angle en A vaut $\pi/3$. Par ailleurs, comme l'a trouvé Edgard DELPLANCHE, la somme des longueurs des côtés vaut : $2(R+r)\sqrt{3}$.

Quant à P_5, cette fois-ci les quatre racines doivent être solution de l'équation **(10)**. Les racines de $z^2 - 2wz + w = 0$ sont $w \pm i\,|w|$, comme on s'y attendait ($J_AI = J_AI_A = R$), elles sont sur (Δ) et

$$w(1-2z) = -z^2 \Rightarrow w(1-2\overline{z}) = z^2 \quad \text{car } 1 - 2\overline{z} = -(1-2z).$$

Les racines de $z^2 + 2wz + w(1-4\overline{w})$ quant à elles, valent : $-w \pm |w|\sqrt{3}$, là encore, la vérification est aisée, car

$$z - \overline{z} = \overline{w} - w \Rightarrow 1 - 2\overline{z} = -1 + 4\overline{w} - 2z \Rightarrow z^2 = w(1-2\overline{z}).$$

L'ordre du point I

Et P_4, dans tout cela ? Le fameux polynôme qu'avait trouvé EULER, qui admet a, b et c pour racines et qui, là, semble déconnecté du reste de la démonstration ? Nous n'avons pas même cherché à quelle condition les racines de P_4 étaient les longueurs des côtés d'un triangle !

Rappelons-nous les relations **(9)**, et prouvons que :

Si s_4 désigne l'une des racines carrées de $27R^2 - 6u\overline{u} - 2(u+\overline{u}) - 1$, et si a, b et c sont les trois racines de

$$P_4(z) = z^3 - s_4z^2 + \left(9R^2 - 3u\overline{u} - (u+\overline{u})\right)z - \left(R^2 - u\overline{u}\right)s_4$$

alors a^2, b^2, c^2 sont les trois racines de

$$P_3(z) = z^3 - \left(9R^2 - 1\right)z^2 + \left(27R^4 - 9R^2 + w + \overline{w}\right)z - R^2\left(27R^4 - 18R^2 + 4(w+\overline{w}) - 1\right)$$

sans aucune autre hypothèse que : $w = \dfrac{u^2}{1-2\bar{u}}$ et $R = |w|$.

Il suffit de prouver que :

$$a^2 + b^2 + c^2 = s_4^2 - 2\left(9R^2 - 3u\bar{u} - (u+\bar{u})\right) = 9R^2 - 1 = s_3$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \left(9R^2 - 3u\bar{u} - (u+\bar{u})\right)^2 - 2\left(R^2 - u\bar{u}\right)s_4^2 = p_3$$

$$a^2b^2c^2 = \left(R^2 - u\bar{u}\right)^2 s_4^2 = R^2\left(27R^4 - 18R^2 + 4(w+\bar{w}) - 1\right) = q_3$$

la première relation est évidente : nous l'avons utilisée pour définir s_4. Pour la dernière, nous utiliserons la relation **(13)** qui exprimait $(9R^2-1)^2 - 4|3w-1|^2$ à partir de ρ et $\cos\varphi$, en posant $u = \dfrac{1+2\rho e^{i\varphi}}{3}$.

Un calcul analogue montre que :

$$s_4^2 = \frac{1}{|1-2u|^2}\left(27|u|^4 - |1-2u|^2\left(6u\bar{u} + 2(u+\bar{u}) + 1\right)\right) = \frac{16}{27}\frac{\Phi}{|1-2u|^2}$$

avec, et c'est heureux, le même Φ que dans la relation **(13)**. Comme $R^2 - u\bar{u} = R\left|-\dfrac{4}{3}\dfrac{\rho(\rho-\cos\varphi)}{|1-2u|}\right|$, notre dernière relation $q_4^2 = q_3$ résulte bien de **(13)**, vu que $27R^4 - 18R^2 + 4(w+\bar{w}) - 1 = \dfrac{1}{3}\left(\left(9R^2-1\right)^2 - 4|3w-1|^2\right)$

Or, aucune hypothèse (hormis $w \neq 0$) n'est nécessaire pour définir r par : $u\bar{u} = R^2 - 2Rr$ et en déduire : $|1-2u| = R - 2r$ car $\left|\dfrac{u^2}{1-2\bar{u}}\right| = R$ par hypothèse. Avec ces notations, on a :

$$9R^2 - 3u\bar{u} - (u+\bar{u}) = \left(\frac{9R^2-1}{2}\right) + \frac{|1-2u|^2}{2} - 5u\bar{u} = \left(9R^2 - \frac{1}{2}\right) + \left(8Rr + 2r^2\right)$$

et :

$$27R^2 - 6u\bar{u} - 2(u+\bar{u}) - 1 = 2\left(\left(9R^2-1\right) + \left(8Rr + 2r^2\right)\right) \quad \textbf{(14)}$$

La relation $q_4^2 = q_3$ permet donc d'écrire :

$$|3w-1|^2 = \frac{\left(9R^2-1\right)^2}{4} - 6r^2\left(\left(9R^2-1\right) + \left(8Rr + 2r^2\right)\right)$$

d'où, comme $$p_3=\frac{1}{3}\left((9R^2-1)^2-|3w-1|^2\right)$$

$$p_3=\frac{(9R^2-1)^2}{4}+2r^2\left((9R^2-1)+(8Rr+2r^2)\right)$$

ce qui est bien égal à :

$$p_4^2-2q_4s_4=\left(\left(\frac{9R^2-1}{2}\right)+(8Rr+2r^2)\right)^2-8Rr\left((9R^2-1)+(8Rr+2r^2)\right)$$

Notons au passage que cette expression **(14)** permettra d'exprimer la condition nécessaire et suffisante : $27R^2-6u\overline{u}-2(u+\overline{u})-1>0$ sous forme : $OH^2<9R^2+8Rr+2r^2$ sous réserve que r est *négatif* (rayon du cercle *exinscrit* défini par $OI^2=R^2-2Rr$).

Il résulte de ce calcul que la condition nécessaire et suffisante pour que P_4 admette trois racines réelles qui, *en valeurs absolues*, soient les longueurs des côtés d'un triangle est que

$$R^2-u\overline{u}\neq 0 \text{ et } 27R^2-6u\overline{u}-2(u+\overline{u})-1>0$$

donc que u soit extérieur à $(\mathcal{Q})$ et ne soit pas sur (Γ). Si cette condition n'est pas remplie, le coefficient constant de P_3 n'est pas strictement négatif, donc ses racines a^2, b^2, c^2 ne sont pas toutes des réels strictement positifs et les racines $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ de P_4 ne sont pas toutes des réels non nuls. Si, par contre, la condition est remplie, nous avons vu que P_3 admettait trois racines réelles strictement positives dont les racines carrées positives (donc : les valeurs absolues des racines de P_4) sont les longueurs des côtés d'un triangle.

Mais on aperçoit là le problème que soulève le polynôme P_4. Dès l'instant où l'on travaille dans **C**, la notion de positivité perd toute signification et, parmi les deux racines carrées que possède un complexe non nul, nous n'avons plus aucun moyen d'en privilégier une. a^2, b^2, c^2 s'exprimaient *rationnellement* en fonction de $\alpha, \overline{\alpha}, \beta, \overline{\beta}, \gamma, \overline{\gamma}$ alors que a, b, c nécessitent de passer par une racine carrée.

Par suite, on pouvait définir *un* polynôme P_3 dont les racines étaient a^2, b^2, c^2, les coefficients de P_3 s'exprimant rationnellement à partir du triangle, donc de w et $\overline{w}$, alors qu'il nous faut définir *huit* polynômes P_4 dont les racines sont $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, rien ne nous permettant d'en privilégier, *a* *priori*, un parmi les huit.

Si je pars de P_3 pour rechercher ce polynôme P_4, j'écrirai :

$$s_4^2 - 2p_4 = s_3$$
$$p_4^2 - 2s_4q_4 = p_3$$
$$q_4^2 = q_3$$

je devrai choisir un q_4 parmi les deux racines carrées de q_3 et un p_4 parmi les quatre racines de l'équation :

$$z^4 - 2p_3z^2 - 8q_3z + p_3^2 - 4q_3s_3 = 0 \qquad \textbf{(15)}$$

j'en déduirai s_4 et obtiendrai ainsi, pour toute valeur de w les huit équations ayant pour racines $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$.

Si j'ai réussi à exprimer l'équation P_4 à partir de l'affixe u de I, c'est parce que la même démonstration qui m'a permis de le faire s'appliquait aux quatre centres I, I_A, I_B, I_C sous la seule condition de changer les signes de a, b et c. Mais il m'a fallu encore extraire une racine carrée, donc de faire un nouveau choix de signe, ce qui permettait bien d'obtenir huit polynômes P_4. Toutefois, il est peu vraisemblable que les polynômes obtenus directement à partir de P_3 "ressemblent" à ces polynômes P_4, car c'est seulement si $w = \dfrac{u^2}{1-2\bar{u}}$ que les racines de P_3 sont les carrés des racines de P_4. Si w est intérieur à $(\mathcal{L})$ $\dfrac{u^2}{1-2\bar{u}} = w$ n'a que deux racines et les racines du P_4 associé aux deux autres racines de P_5 n'ont plus rien à voir avec a, b et c. La moitié des polynômes ayant pour racines $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ sont donc, dans ce cas, sans aucune ressemblance avec le polynôme P_4 d'Euler, notamment leur terme p_4 n'est pas réel. Alors que si je pars de P_3 pour rechercher P_4, la résolution par radicaux de l'équation **(15)** est *a priori* la même quel que soit w.

Quelles sont les valeurs de u pour lesquelles P_4 admet une racine double ?

Le W associé doit appartenir à l'ensemble des W pour lesquels P_3 admet une racine double, donc à la droite *(OH)* ou au limaçon $(\mathcal{L})$. Pour qu'il appartienne au limaçon, il faut que u soit sur le cercle (Γ) ou la quartique $(\mathcal{Q})$. Une des racines est alors nulle, mais pour u sur le cercle, les racines de P_4 sont $(a, a, 0)$ $(a = |3u - 1|)$ et pour u sur la quartique, $(a, -a, 0)$, seul le cercle (Γ) est à retenir. Pour que W appartienne à la droite *(OH)*, u doit être soit sur la même droite, soit sur l'hyperbole de sommets O et G, de foyer O' et d'excentricité 2. Remarquons que la branche de gauche de l'hyperbole est, en partie, à l'intérieur de $(\mathcal{Q})$, donnant des W inacceptables dans $[H'O]$, alors que la branche de droite se faufile habilement entre le cercle (Γ) et la quartique $(\mathcal{Q})$, le rayon de courbure en G de la quartique, l'hyperbole et le cercle étant respectivement : $\frac{8}{15}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Si u est sur la droite, P_4 admet bien une racine double $\frac{u}{1-2u}\sqrt{(3u-1)(u+1)}$ et une simple :

$\frac{1-u}{1-2u}\sqrt{(3u-1)(u+1)}$, elles sont de même signe sur $]GH[$ et de signe contraire à l'extérieur de $[H'H]$, mais si u est sur l'hyperbole, les trois racines : $\sqrt{(x+1)(3x-1)}$, $\sqrt{x(3x-1)}$, $-\sqrt{x(3x-1)}$ (x étant la partie réelle de u, $x = w$) sont distinctes.

Le lieu des u tels que P_4 admette une racine double se réduit donc au cercle (Γ) et à la droite (OH), le discriminant de P_4 (que j'ai calculé, avis aux amateurs...) est donc plus simple que celui de P_3 (qui s'annule sur (OH) et sur $(\mathcal{L})$), alors que le coefficient $s_4 = a + b + c$, qui s'annule sur $(\mathcal{Q})$, est plus compliqué que les coefficients de P_3.

Tout ceci suggère d'approfondir la notion d'*ordre* d'un point par rapport à un triangle. Si un point d'affixe z est tel que w s'exprime rationnellement en fonction de z et $\bar{z}$ et que, si w est pivot, z soit l'une des n racines d'un polynôme de degré n à coefficients rationnels en w et $\bar{w}$, irréductible sur $\mathbf{Q}(w, \bar{w})$, nous dirons que z est un point d'ordre n par rapport au triangle. Les autres racines dudit polynôme sont les conjugués du point d'affixe z. Les points I, I_A, I_B et I_C sont d'ordre 4. On conviendra que les points de la droite d'Euler, O, H, G, qui définissent notre repère, sont d'ordre 0. Les sommets A, B, C sont d'ordre 3 : ils sont bien évidemment les racines de P_0, polynôme de degré 3 ; en outre, si w est pivot, $\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma} = w\bar{w}$, donc, en substituant dans P_0, on trouve : $w = \alpha\,\frac{1-\alpha}{1-\bar{\alpha}} = \beta\,\frac{1-\beta}{1-\bar{\beta}} = \gamma\,\frac{1-\gamma}{1-\bar{\gamma}}$. La connaissance de O, H et un sommet détermine donc le triangle.

Il y a néanmoins une exception, qui a retenu mon attention : c'est lorsque ledit sommet est en H. Parmi les racines évidentes de P_0, on aurait pu remarquer que si $|w| = 1$, 1 est racine évidente : le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle quelconque est son orthocentre. J'ai cherché où se trouvait

I dans ce cas : sur un autre limaçon de Pascal $|u|^2 = |1 - 2u|$, inverse de l'hyperbole équilatère de centre O et de foyer H dans l'inversion de pôle H qui laisse O invariant. Mais I parcourt tout ce limaçon, sur la boucle intérieure il est centre du cercle inscrit, sur la boucle extérieure, centre du cercle exinscrit. C'est ce qui m'a suggéré cet autre exercice :

> Soit ABC un triangle rectangle en A, et I le centre d'un quelconque des cercles inscrit ou exinscrits : montrer que l'hyperbole équilatère de foyer A et de centre I passe par O, milieu de $[BC]$.

Cet exercice est assez simple, mais il met bien en relief la parenté entre cercles inscrit et exinscrits. Raymond RAYNAUD le démontre en fixant A et le cercle, inscrit ou exinscrit, peu importe. La droite (BC) est n'importe quelle tangente au cercle ; il suffit donc d'étudier le milieu O de ses intersections B et C avec les deux axes (Ax) et (Ay), tangents au cercle, et de démontrer qu'il décrit une hyperbole de foyer A et de centre I, centre du cercle.

Ma méthode était voisine : dans un repère de centre I et d'axes parallèles aux côtés du triangle, en choisissant bien les vecteurs unitaires, j'ai pour coordonnées de A, B, C :

$$\left(\frac{-a+b+c}{2}, \frac{-a+b+c}{2}\right),$$

$$\left(\frac{-a+b-c}{2}, \frac{-a+b+c}{2}\right)$$

$$\text{et} \left(\frac{-a+b+c}{2}, \frac{-a-b+c}{2}\right),$$

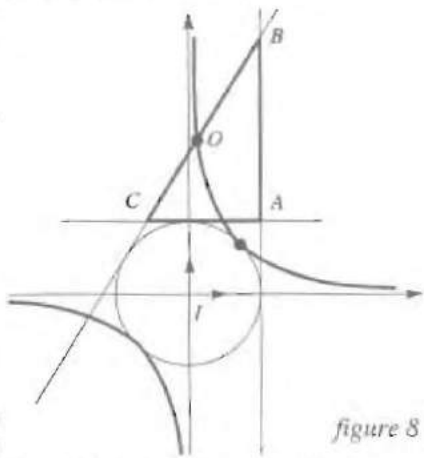


figure 8

avec $a^2 = b^2 + c^2$, a, b, c n'étant pas obligatoirement positifs, cela dépend si I est centre d'un cercle inscrit ou exinscrit. Quoiqu'il en soit, O, de coordonnées $\left(\frac{-a+b}{2}, \frac{-a+c}{2}\right)$ · appartiennent toujours à l'hyperbole d'équation : $xy = \frac{IA^2}{2}$

LE POINT DE LEMOINE

En conclusion, pourquoi ne pas généraliser notre problème à d'autres points que O, I, H, comme le préconise Philippe DELEHAM?

J'ai commencé par K, le point de Lemoine du triangle, particulièrement intéressant à plus d'un titre.

Tout d'abord, c'est un point d'ordre 1. J'entends par là que son affixe z_K s'exprime *rationnellement* en fonction de w et $\overline{w}$ tout comme, bien évidemment, w s'exprime rationnellement à partir de z_K et $\overline{z}_K$.

Utilisons comme "définition" le fait que c'est le seul point qui soit isobarycentre de ses trois projections orthogonales sur les côtés du triangle. Si z, affixe d'un point quelconque du plan, vérifie $z - \alpha = (\beta - \alpha)(x + iy)$, l'affixe z' de sa projection orthogonale sur (AB) sera : $z' = \alpha + x(\beta - \alpha)$ avec $x = \frac{1}{2}\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} + \frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\right)$ .Si, en outre $|\alpha| = |\beta| = R$, $\left(\overline{\beta} - \overline{\alpha}\right)\alpha\beta = -R^2(\beta - \alpha)$,

donc $z' = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{z}{2} - \frac{\overline{z}}{2R^2}\alpha\beta$. Comme $\alpha + \beta + \gamma = 1$, et $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = w$,

z_K est isobarycentre de ses projections orthogonales si et seulement si :

$1 + 3\frac{z_K}{2} - \frac{\overline{z}_K}{2R^2}w = 3z_K$ ce qui peut s'écrire, du fait que $R^2 = w\overline{w}$:

$$\boxed{w = \frac{z_K}{2 - 3\overline{z}_K}}$$

On en déduit que : $z_K - 2w = -3w\overline{w}(2 - 3z_K)$, donc :

$$\boxed{z_K = 2w\left(\frac{3\overline{w} - 1}{9R^2 - 1}\right)}$$

Notons au passage que, comme $a^2b^2c^2 = \frac{R^2}{3}\left(\left(9R^2 - 1\right)^2 - 4\left|3w - 1\right|^2\right)$,

$$OK^2 = R^2 - 3\left(\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2$$

relation connue de Lemoine, et qu'il est intéressant de rapprocher de la relation d'Euler : $$OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c} .$$

Dans cette dernière, en changeant les signes de a, b et c, j'obtiens quatre valeurs distinctes OI^2, OI_A^2, OI_B^2, OI_C^2 alors que ces changements de signe n'affectent pas OK^2.

En outre, si O'' désigne le milieu de $[GH]$, centre du cercle (Γ),

$w = \dfrac{z_K}{2 - 3\bar{z}_K}$ entraîne $OG.OK = R.O''K$, que l'on rapprochera du théorème de Feuerbach : $OI^2 = 2R.O'I$, G et K étant isogonaux comme I et I.

La condition nécessaire et suffisante pour que w soit pivot étant que $2\,|3w - 1| < |9R^2 - 1|$, (cf. relation (6)), la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle admettant O pour centre du cercle circonscrit, H pour orthocentre et K pour point de Lemoine est que $|z_K| < |w|$ (donc : K intérieur au cercle circonscrit), ce qui équivaut à : $|2 - 3z_K| < 1$, ou encore que K soit intérieur au cercle (Γ) à l'exclusion de son centre. En effet, si K est intérieur à (Γ), le w qu'il définit est bien pivot d'un triangle dont le point de Lemoine vérifie la même relation que z_K, donc est égal à K dans la mesure où cette relation est d'ordre 1. Et il est clair que le triangle solution est unique.

L'intérêt de ce résultat, c'est que la condition est la même que pour le centre I du cercle inscrit, hormis le point à exclure (O' pour I, O'' pour K). Qui plus est, si $z_K = \dfrac{2 - e^{it}}{3}$ alors $w = e^{it}\left(\dfrac{2 - e^{it}}{3}\right)$. Nous avions trouvé la même valeur de w pour $u = \dfrac{2 - e^{it}}{3}$, et cela prouve que, pour cette valeur de w, I et K sont confondus. Ce qui n'a d'ailleurs rien de surprenant : K est l'isogonal de G, ce qui entraîne, d'une part qu'il est intérieur au triangle, d'autre part que G et K sont de part et d'autre de (AI), de (BI) et de (CI). Si A, B et I tendent vers un même point du cercle (Γ), G restant à bonne distance, K va se retrouver coincé dans le triangle ABI, et il tendra lui aussi vers ce même point.

D'où l'idée d'étudier ce qui se passe si l'on se donne, non plus O, I, H, mais O, I, K. Car alors, tous ces cas de triangles dégénérés, où I et K sont sur le cercle, seront réduits à un point $I = K$, et... comment sera définie la frontière de l'ensemble des K possibles ?

Choisissons un des plans complexes où O et I aient pour affixes 0 et 1 respectivement. A, B et C auront pour affixes : $\alpha' = \alpha/u$, $\beta' = \beta/u$ et $\gamma' = \gamma/u$; On aura:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = \frac{1}{u}$$

$$\alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha' = \frac{w}{u^2} = \frac{1}{1 - 2\bar{u}}$$

$$\alpha'\beta'\gamma' = \frac{w^2\bar{w}}{u^3} = \frac{u\bar{u}^2}{(1 - 2\bar{u})^2(1 - 2u)}$$

ce qui suggère de prendre pour nouvelle inconnue : $\boxed{v = \dfrac{u}{1-2u}}$,

cette variable v suffit à déterminer le triangle : $u = \dfrac{v}{1+2v}$ donc

$w = v^2\left(\dfrac{1+2\overline{v}}{(1+2v)^2}\right)$; α', β' et γ' sont les racines de

$$z^3 - \left(2 + \frac{1}{v}\right)z^2 + (2\overline{v} + 1)z - v\overline{v}^2 = 0$$

et tout le problème consistera à déterminer v à partir de $k = z_K/u$, affixe de K dans notre nouveau plan complexe, et à s'assurer que la solution v trouvée définit bien un triangle solution.

En utilisant la même méthode que précédemment, on voit que k doit vérifier : $(\alpha' + \beta' + \gamma') + \dfrac{3k}{2} - \dfrac{\overline{k}}{2R'^2}(\alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha') = 3k$

où $R' = |\alpha'| = |\beta'| = |\gamma'| = |v|$. Cela peut donc s'écrire :

$\left(2 + \dfrac{1}{v}\right) + \dfrac{3k}{2} - \dfrac{\overline{k}(2\overline{v}+1)}{2v\overline{v}} = 3k$ ou encore $2\overline{v}(1-\overline{k}) = (3k-4)v\overline{v} + \overline{k}$ **(16)**

En multipliant chaque membre par son conjugué, on trouve que $v\overline{v}$ doit annuler le polynôme :

$$P_8(z) = |3k-4|^2 z^2 + \left(3(k+\overline{k})^2 - 10\,k\overline{k} - 4\right)z + |k|^2$$

Première condition : ce polynôme doit admettre une ou deux racines $v\overline{v}$ réelles positives, ce qui suppose :

* que son discriminant soit positif : en posant $k = x_K + iy_K$ et en divisant par 16 le discriminant, cette condition s'écrit :

$$\Delta = 4y_K^4 - (x_K - 1)(7x_K + 1)y_K^2 + (x_K - 1)^2\left(-2x_K^2 + 2x_K + 1\right) \geqslant 0 \quad \textbf{(17)}$$

La courbe délimitant ce domaine est une quartique :

$$y_K^2 = \left(\frac{x_K - 1}{8}\right)\left(7x_K + 1 \pm \sqrt{(9x_K+3)(9x_K-5)}\right)$$

dont Jacques Bouteloup a bien voulu faire l'étude détaillée. La branche gauche semble très verticale, en réalité, elle zigzague entre trois tangentes verticales assez proches (en $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et en $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{3}$) avant d'obliquer vers les mêmes asymptotes $y = \pm\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ que la branche de droite. C'est entre les deux branches et à l'intérieur de la boucle que le discriminant est positif.

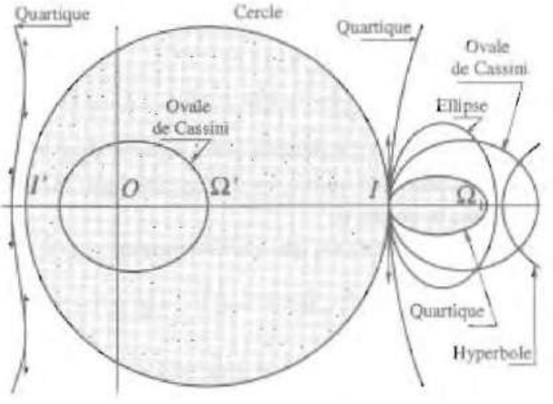


figure 9

✱ que les racines, réelles, soient en outre positives. Comme leur produit est manifestement positif, leur somme : $2\left(5y_K^2 - x_K^2 + 2\right)$ doit être positive, ce qui définit une hyperbole de sommets $\pm\sqrt{2}$; les racines sont positives entre les branches de l'hyperbole, ce qui inclut le domaine où Δ est positif.

Dans ce domaine où Δ est positif, l'équation a donc deux racines positives et la relation (**16**) nous permet d'en déduire deux valeurs de v, donc a priori deux triangles :

$$v = \frac{|k-1|^2 + iy_K(3x_K - 2) \pm \sqrt{\Delta}}{(3k-4)(1-k)}$$ Δ étant défini par la relation (**17**).

…sous réserve que ces valeurs de v soient acceptables, donc que le w correspondant soit bien le pivot d'un triangle. En outre, il serait bon de dissocier le cas où I est centre du cercle inscrit de celui où il est centre d'un cercle exinscrit.

w est pivot d'un triangle, nous l'avons vu, si et seulement si $|w| > |z_K|$. Après division par u, on trouve comme condition nécessaire et suffisante que $|v| > |k|$. Il suffit donc d'étudier la place de $|k|^2$ par rapport aux racines de P_8 pour voir combien l'équation (**16**) admet de racines de module supérieur à $|k|$. Par ailleurs, I est centre du cercle inscrit si et seulement si

$\left|\frac{u}{1-2u}\right| = |v| > 1$ là, ce sera la place de 1 par rapport aux racines de P_8 qui nous permettra de conclure.

Commençons par ce second problème : $P_8(1) = 12(x_K - 1)^2$ est toujours positif. C'est donc $P'_8(1) = 4\left(y_K^2 + 5\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right)$ qui déterminera si 1 est supérieur ou inférieur aux deux racines : à l'intérieur de l'ellipse, les racines sont supérieures à 1 (cercle inscrit), à l'extérieur, elles sont inférieures à 1 (cercle exinscrit).

Une remarque avant d'aborder la place de $|k|^2$ par rapport aux racines de P_8 : Si I est, dans le premier repère (où H a pour affixe 1), sur la quartique $(\mathcal{Q})$, K est sur (Γ), confondu avec deux des sommets du triangle. En étudiant les racines doubles de P_5, on a vu que l'on avait : $u = -z_K \pm 2|z_K|\, e^{i\psi/2}$. Il en résulte que $k = \frac{z_K}{u} = \frac{1}{-1 \pm 2e^{i\psi}}$. Peu importe ψ : K est sur l'inverse d'un cercle qui est encore un cercle, et plus précisément sur le cercle de centre 1/3 et de rayon 2/3 (attention qu'ici 1/3 ne correspond pas à G, mais à un point Ω' tel que $\overrightarrow{O\Omega'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OI}$). Il convient donc de paramétrer $k = \frac{1 + 2\rho e^{i\theta}}{3}$ pour que ce cercle $\rho = 1$ nous saute aux yeux.

De fait, avec ce paramétrage, $P_8(|k|^2) = \frac{16}{9}|k|^2(\rho^2 - 1)(\rho^2 - 2\rho\cos\varphi + 1)$ ce qui entraîne qu'à l'intérieur du cercle, $|k|^2$ est entre les racines de P_8, une et une seule des deux racines définit un triangle, alors qu'à l'extérieur, zéro ou deux racines définissent un triangle.

Et pour discriminer entre zéro ou deux dans ce dernier cas, on peut chercher, par exemple, si le produit des racines est ou non supérieur à $|k|^4$, donc si $\left|\frac{k}{3k-4}\right|^2 \geqslant |k|^4$, ce qui définit un ovale de Cassini $|k|\,|k - 4/3| \leqslant 1/3$: à l'extérieur du cercle et de l'ovale, il n'y a pas de racine acceptable, à l'extérieur du cercle et à l'intérieur de l'ovale, il y a deux racines acceptables, sous réserve, bien sûr, que les autres conditions soient elles aussi remplies.

C'est donc en étudiant la position respective de la quartique, de l'hyperbole, de l'ellipse, du cercle et de l'ovale de Cassini (toutes, sauf l'hyperbole ont une tangente verticale en I, *cf. figure 9*) et en étudiant séparément les points I et Ω (d'affixe 4/3), qu'on peut conclure ainsi :

Soient O, I, K trois points d'un plan

★ La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle admettant O pour centre du cercle circonscrit, I pour centre du cercle *inscrit* et K pour point de Lemoine est que, dans un repère orthonormé centré en O, où I ait pour coordonnées (1 , 0), K, de coordonnées (x_K , y_K), soit à l'intérieur ou sur la boucle de la quartique définie par :

$$x_K > 1 \text{ , } {y_K}^2 \leqslant \left(\frac{x_K - 1}{8}\right)\left(7x_K + 1 - \sqrt{(9x_K + 3)(9x_K - 5)}\right)$$

Si K est surcette boucle ou si K est en Ω, de coordonnées (4/3 , 0), le triangle solution est unique, mais si K, distinct de Ω, est strictement intérieur à la boucle, il existe deux triangles solutions distincts. L'une des solutions tend vers un triangle équilatéral infini lorsque K tend vers Ω. Si K tend vers I, les solutions tendent vers un triangle dégénéré ayant un ou deux angles nuls.

★ La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle admettant O pour centre du cercle circonscrit, I pour centre d'un des cercles *exinscrits* et K pour point de Lemoine est que K soit strictement intérieur au cercle de diamètre $[II']$, avec $\overrightarrow{OI'} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{OI}$. Le triangle solution est unique. Si K est en O, le triangle solution est équilatéral. Si K tend vers le cercle, le triangle tend vers un triangle dégénéré ayant un angle nul. Si K tend vers I, le triangle tend vers un triangle dégénéré ayant deux angles nuls.

Une fois n'est pas coutume : avec ce nouveau repère, le cas du cercle exinscrit est relativement plus simple que celui du cercle inscrit!