AVIS DE RECHERCHE

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.

Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet et votre nom sur chacune, et, si possible, une disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour immédiat) à :

Robert FERRÉOL
6, rue des annelets
75019 PARIS.
ou à l'adresse internet du lycée d'Enghien :
cabout @ sancerre.ac - idf . jussieu.fr

Nouveaux avis de recherche

Puisque j'ai ce mois-ci reçu peu de demandes d'avis de recherche, je vous en propose moi-même deux, qui, je l'espère, vous divertiront.

Avis de recherche N° 69

Lorsque je joue au pendu, je propose des mots assez longs donc assez difficiles à trouver, pensant augmenter les chances de pendre mon adversaire. Or ma fille propose au contraire des mots très courts, "puisqu'il y a alors plus de chances que l'adversaire dise des lettres n'intervenant pas dans le mot"... Qui a raison ?

Avis de recherche N° 70

Dans "Astérix chez les Bretons" (p 46), les romaines légions se mettent en carré, puis en triangle, et enfin en disque. *Combien y a-t-il de légionnaires ?*

Avis de recherche N° 71 de M. Deleham (Coconi, Mayotte).

J'observe que $\frac{y^n+1}{x+1} = \frac{y^m-1}{x-1}$ admet la solution : $\begin{cases} x = 6\ ,\ n = 5 \\ y = 10\ ,\ m = 4 \end{cases}$.

Existe-t-il d'autres solutions en entiers non triviales ?

Voici enfin quelques avis de recherche n'ayant pas eu de réponse :

Avis de recherche n° 41

Démonstration du théorème du sandwich au jambon (ou de la tartine beurre confiture) : étant donnés trois solides quelconques de l'espace, il existe un et un seul plan qui coupe chacun des solides en deux volumes égaux (+ généralisation à $\mathbb{R}^n$).

Avis de recherche n°43 de Marc Royer (Montélimar)

Étude des courbes d'équation bipolaire $MA^\alpha + MB^\alpha = AB^\alpha$; M. Royer demande en particulier ce qui se passe quand $\alpha \to \pm\infty$.

Réponses aux avis précédents

Avis de recherche n° 23 (cf *Bulletin* 395)

Est-il possible de disposer n reines sur un échiquier de taille (n, n) de sorte que deux quelconques de ces reines ne soient jamais en prise mutuelle ?

Contribution de Jean Moreau de Saint Martin (Paris).

La réponse publiée dans le *Bulletin* 395 indique qu'on n'a pas de "belle" solution générale, bien que le problème soit possible pour $n > 4$.

Je n'ai pas de recette miracle donnant sans tâtonner *toutes* les solutions, mais il existe une formule assez simple pour obtenir sans tâtonnements *une* solution particulière, quel que soit n. La voici, sous forme de programme Pascal :

```
program n_dames;
 const n = ;                    { à compléter, n cases par côté}
 var  i, b, m, s: integer;
begin
 m := n - (n mod 2); if ((n + 2) mod 6) < 4 then  b := 0 else  b := 1;
 for i := 1 to m do
  begin
    if m + 1 < 2 * i then    s := m+2   else   s := m-4;
    write('rangée ', i : 3, ', colonne ');
```

```
    writeln(1 + ((2 * i - 1 + ( s * b) div 2) mod (m + 1 - b)) : 3);
  end;
 if m < n then  writeln('rangée ', n : 3, ', colonne ', n : 3);
end.
```

Pour énumérer les solutions, je n'ai pas mieux qu'une exploration d'arborescence. Avec un tel programme, j'obtiens, comme nombre de solutions :

nombre de cases par côté :	5	6	7	8	9	10
nombre de solutions :	10	4	40	92	352	724

Les 724 solutions pour 10×10 cases sont obtenues en 10 minutes sur mon Mac.

Le même principe d'exploration peut s'appliquer à un problème plus ardu : colorier les cases de l'échiquier de façon que deux dames placées sur des cases de même couleur ne soient pas mutuellement en prise.

Au lieu d'affecter à chacune des n colonnes la rangée (de 1 à n) où on y place une dame, il s'agit d'affecter à chacune des n^2 cases une couleur (de 1 à nc).

Difficulté : l'explosion combinatoire qui rend pratiquement inaccessible même le premier cas intéressant (8×8 en 9 couleurs).

Une solution "systématique", mais pas forcément minimale en nombre de couleurs, est donnée par la formule $c(i,j) = ((i+2j) \text{ modulo } nc)+1$ pour $n \leq nc$, $nc = 6k\pm1$.

Les cas intéressants à explorer directement sont $n = 6k+2$ et $n = 6k+3$: on conjecture que $n + 1$ couleurs suffisent (cf. C. Berge, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod).

N.B. Mon grand-père, grand amateur d'échecs, m'a enseigné (à la fin des années 40...) qu'il faut dire "dame" et protestait énergiquement quand on disait "reine" aux échecs.

Avis de recherche n° 60 de Marc Royer (Montélimar)

Peut-on majorer $\frac{S}{L^2}$ pour toute surface plane d'aire S et de contour de longueur L ? Peut-on majorer $\frac{V^2}{L^3}$ pour tout solide de volume S et de frontière d'aire S ?

De nombreux collègues (Hubert Barberis, Dominique Gaonac'h, Arnaud Pascal, Joël Payen, Jean-Paul Roux), ont écrit pour dire que cette majoration était une conséquence du théorème des isopérimètres : de toutes les surfaces planes de contour de longueur donnée, celle qui a la plus grande aire est le disque, et de sa généralisation à l'espace.

Ce qui donne les majorations

$$\frac{S}{L^2} \leqslant \frac{\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2}{L^2} = \frac{1}{4\pi} \text{ et } \frac{V^2}{L^2} \leqslant \frac{\left(\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{S}{4\pi}}\right)^3\right)^2}{S^3} = \frac{1}{36\pi}.$$

Si l'on généralise à la dimension n, on obtient $\frac{V^{n-1}}{S^n} \leqslant \frac{v_n^{n-1}}{s_n^n}$, où V est la mesure n-dimensionnelle d'un solide de $\mathbb{R}^n$, et S la mesure $(n-1)$-dimensionnelle de sa frontière, v_n la mesure n-dimensionnelle de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et s_n la mesure $(n-1)$ dimensionnelle de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

Sachant que $v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$ (où $\alpha! = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^\alpha \, dt$) et $s_n = nv_n$ on obtient :

$$\frac{V^{n-1}}{S^n} \leqslant \frac{1}{n^n v_n} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{n^n \pi^{n/2}}.$$

Par exemple, pour $n = 4$: $\frac{V^3}{S^4} \leqslant \frac{1}{128\,\pi^2}$ et pour $n = 5$, $\frac{V^4}{S^5} \leqslant \frac{3}{5000\,\pi^2}$.

Une référence classique pour ce théorème est : M. BERGER, *Géométrie*, Nathan, théorème 12.11.1, qui n'énonce le théorème des isopérimètres en dimension $\geqslant 3$ que pour les *convexes compacts* de $\mathbb{R}^n$. En effet, en dimension $\geqslant 3$ "il suffit de prendre une boule et de lui rajouter une chevelure quelconque, ou de l'herbe, c'est-à-dire des courbes ; on vérifie alors que, et le volume, et l'aire, ne changent pas."

(Personnellement, la restriction aux convexes me semble être excessive et je me demande si on ne pourrait pas étendre le théorème aux compacts de $\mathbb{R}^n$ égaux à l'adhérence de leur intérieur...).

Une autre référence, plus heuristique, est : Stephan HILDEBRANDT et Anthony TOMBA, *Mathématiques et formes optimales*, Belin (1985).

Avis de recherche n° 61 d'un représentation du groupe de Klein où les trois éléments non neutres jouent des rôles symétriques.

Huit collègues ont encore envoyé une ou plusieurs solutions (Samuel BOUREAU, Jacques BOUTELOUP, Dominique GAONAC'H, Claude JOBERT, Jean-François MARIN, Claude PAGANO, Joël PAYEN et Pierre RENFER).

Au top, il y a évidemment $\{id, s_{Ox}, s_{Oy}, s_{Oz}\}$ (groupe des rotations du parallélépipède rectangle), mais, en plus des quatre autres modèles proposés dans le *Bulletin* de mars,

Samuel BOUREAU a trouvé $\{O, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$ muni de la différence symétrique.

Jean-François MARIN le sous-groupe de S_6 : $\{id, (1,2)o(3,4), (3,4)o(5,6), (5,6)o(1,2)\}$.

et Jacques BOUTELOUP :

- le groupe multiplicatif des huit quaternions $1, -1, i, -i, j, -j, k, -k$ quotienté par la relation : $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a = b$ ou $-b$.
- le groupe $\{id, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ des bijections de E^3, σ_1 étant définie par $\sigma_1((x,y,z)) = (x, \sigma(y), \sigma(z))$, $\sigma_2((x,y,z)) = (\sigma(x), y, \sigma(z))$, $\sigma_3((x,y,z)) = (\sigma(x), \sigma(y), z)$ où σ est une involution de E.

J'ai compté que pour finir, ont défilé dans cet avis de recherche *12* réalisations (plus ou moins) différentes du groupe de Klein !

Avis de recherche n° 63

Les sommes $S_m^n = e^{-n}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{n^k}{k!}$ suscitent deux suites (S_n^n) et (S_{n-1}^n) adjacentes de limite 1/2. Quelles sont les parties principales de $\frac{1}{2} - S_n^n$ et $S_{n-1}^n - \frac{1}{2}$?

Réponse de Jean MOREAU DE SAINT MARTIN.

Un coup d'œil à une table de la loi de probabilité de Poisson conduit à constater, pour les expressions $\frac{1}{2} - S_n^n$ et $S_{n-1}^n - \frac{1}{2}$, des valeurs voisines de $\frac{1}{3\sqrt{2\pi n}}$ et $\frac{2}{3\sqrt{2\pi n}}$ respectivement.

Pour les justifier, Jean MOREAU DE SAINT-MARTIN propose les étapes suivantes.

1) Si N est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre m, et X une variable aléatoire de densité $\frac{x^n e^{-x}}{n\,!}$ (x réel positif), on a $\Pr(N \leqslant n) = \Pr(X > m)$.
2) Si Y est une variable aléatoire suivant la loi log-normale, y_1 la valeur de densité maximum, y_2 la médiane (probabilité de dépassement = 1/2), y_3 l'espérance, on a la relation $(y_2)^3 = y_1 (y_3)^2$.
3) La relation du 2) est vérifiée approximativement par beaucoup de lois continues unimodales. En admettant que cela vaut pour la variable X du 1) pour n grand (peut-on le montrer plus rigoureusement ?), $x_2 \cong \frac{x_1 + 2x_3}{3}$ et par interpolation : $3\Pr(X > x_2) \cong \Pr(X > x_1) + 2\Pr(X > x_3)$.

Avec $x_1 = n$, $x_3 = n + 1$, on obtient $\frac{3}{2} \cong 3\Pr(X > n) - 2\int_n^{n-1} \frac{x^n e^{-x}}{n\,!}\,dx$.

On en tire les approximations de $\Pr(N \leqslant n)$, puis de $\Pr(N < n)$, d'où le résultat annoncé.

Avis de recherche n° 67 de Claude Morin (lycée Gay Lussac, Limoges)

On abat une à une les cartes (battues) d'un jeu de 32 cartes en disant successivement : "as, roi, dame, ..., sept, as, roi, ..." sans tenir compte des couleurs ; quelle est la probabilité de ne jamais tomber juste ?

Réponse de Jean Moreau de Saint-Martin, qui précise que c'est un problème qu'il avait découvert en 1980, posé (avec 52 cartes) dans la revue des X. Il en a trouvé la solution au bout d'un an et demi, mais s'imaginant bien ne pas être le premier, il compte que M. Vidiani saura apporter des renseignements sur ses devanciers...

Ce problème est une généralisation du "problème de Montmort" ou "problème des chapeaux" (n personnes reprennent au hasard un chapeau au vestiaire, quelle est la probabilité qu'aucune ne reprenne le sien ?).

Le problème peut s'énoncer de façon encore plus générale comme suit : Soit n cartes, dans lesquelles on distingue p catégories (qui ne totalisent pas plus de n cartes, éventuellement moins). La catégorie j est présente par c_j cartes et figure a_j fois dans les annonces qui sont faites en même temps qu'on abat les cartes une à une. La probabilité qu'il n'y ait aucune coïncidence dans les catégories 1, 2, ... p est égale à l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^n dt}{n!} \prod_{1 \le j \le p} P\left(\frac{1}{t}; a_j, c_j\right)$$

où $P(x\,;\,a, c)$ est le polynôme $\sum_{i=0}^{\min(a,c)} (-1)^v C_n^v C_c^v v! x^v$.

La démonstration se fait par récurrence sur p, en utilisant la formule de Poincaré

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right|$$

pour passer de "pas de coïncidence dans les catégories 1, 2, ... $p-1$" à "pas de coïncidence dans les catégories 1, 2, ... $p-1$, p".

Selon la formule précédente où on fait $n = 32$, $p = 8$, $c_j = a_j = 4$, la probabilité demandée par Claude Morin vaut

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^{32} dt}{32!}\left[P\left(\frac{1}{t}; 4,4\right)\right]^8 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{32!}\left[t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24\right]^8$$

En développant la puissance 8ème, on peut mettre cette expression sous la forme d'une somme de 495 termes (nombres rationnels)

$$\sum_{0 \le a \le b \le c \le d \le 8} \frac{8!\,(a+b+c+d)!\,2^{24-4a+b-2c+2d}\,3^{8-2b+c}\,(-1)^{a+b+c+d}}{32!\,a!\,(b-a)!\,(c-b)!\,(d-c)!\,(8-d)!}$$

et obtenir le résultat final

$$\frac{35780355973270898382001}{265606869970431990000000}.$$

Enfin, une extension de la méthode permet d'obtenir la fonction génératrice de la variable aléatoire V = nombre de coïncidences (toujours pour 32 cartes)

$$\sum_{v=0}^{32} z^v \Pr(V = v) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^{32} dt}{32!}\left[P\left(\frac{1-z}{t}; 4,4\right)\right]^8.$$

Sur le problème de Montmort, voir aussi la revue Quadrature (n° 17, pages 40-44).