La quadrature du cercle à précision théorique variable

Yves Pirat

I - Introduction

En raison de la nature particulière du nombre π, qui est transcendant, il est impossible de carrer un cercle, c'est-à-dire de construire, à la règle et au compas, un carré de même surface qu'un cercle donné. Cela revient à dire que la quadrature du cercle n'est pas réalisable et que l'on ne peut obtenir qu'une quadrature approchée.

Le problème que tentent de résoudre les quadrateurs consiste dès lors à approcher l'inaccessible perfection avec une erreur relative la plus petite possible, étant bien entendu que la précision obtenue est purement théorique. En outre, il convient de préciser que cette gymnastique cérébrale n'intéresse pas les professionnels de la Mathématique car la quadrature n'a aucune application pratique, pour l'instant en tout cas.

En Avril 1988, j'ai publié dans la revue n°50 de *l'Ouvert* de l'IREM de Strasbourg une formule constructible avec une erreur relative de $\dfrac{1}{40\,000\,000\,000}$ (*). J'ai cherché ensuite une solution imbattable, pouvant faire intervenir toutes les décimales connues de π, soit quelques millions à l'heure actuelle.

L'idée de départ est facile à énoncer : construire le côté du carré $R\sqrt{\pi}$,

* $\sqrt{40} - \dfrac{9{,}548888}{3}$

décimale après décimale, ce qui peut paraître impossible à tous ceux qui ont tenté de résoudre le fameux problème. Je fus le premier surpris de découvrir que la réalisation de cette hypothèse de travail était, contre toute attente, d'une simplicité presque enfantine, ne faisant appel qu'à des notions élémentaires d'arithmétique et de géométrie. Il me semble certain que l'homme ne pourra plus jamais faire mieux.

Précisons également que ma méthode détermine un lieu géométrique qui permet de construire immédiatement le côté du carré correspondant à n'importe quel autre cercle donné.

II - Le procédé

Pour simplifier l'exposé du procédé, je limiterai la démonstration à cinq décimales, en partant de l'approximation $\pi = 3,14159$, mais la méthode est générale et convient pour toute autre approximation décimale de π.

On se donne au départ un cercle C de centre O et de rayon R.

Dressons d'abord le tableau suivant, où la notation : 0,9 signifie «division par 0,9».

		3,14159	: non divisible par 9
+ 4	=	7,14159	: divisible par 9
: 0,9	=	7,9351	: non divisible par 9
− 7	=	0,9351	: divisible par 9
: 0,9	=	1,039	: non divisible par 9
+ 5	=	6,039	: divisible par 9
: 0,9	=	6,71	: non divisible par 9
− 5	=	1,71	: divisible par 9
: 0,9	=	1,9	: non divisible par 9
− 1	=	0,9	: divisible par 9
: 0,9	=	1	: non divisible par 9

Tableau n°1

Maintenant, renversons ce tableau :

1 rayon $\times$ 0,9	=	$0,9R$
$0,9R + 1R$	=	$1,9R$
$1,9R \times 0,9$	=	$1,71R$
$1,71R + 5R$	=	$6,71R$
$6,71R \times 0,9$	=	$6,039R$
$6,039R - 5R$	=	$1,039R$
$1,039R \times 0,9$	=	$0,9351R$
$0,9351R + 7R$	=	$7,9351R$
$7,9351R \times 0,9$	=	$7,14159R$
$7,14159R - 4R$	=	$3,14159R$

Tableau n°2

Les premières étapes de la construction suffiront à montrer le mécanisme du procédé qui consiste, comme le schématise le tableau ci-dessus, à effectuer alternativement et jusqu'à la dernière décimale, les deux opérations suivantes : 1) Multiplier par 0,9 (qui se traduira géométriquement par une homothétie), 2) Ajouter ou retrancher des segments de longueur R.

Avant d'aborder la construction, remarquons que le procédé mis en évidence sur un exemple est général. Partant, comme dans le tableau 1, d'un nombre décimal $x = e,x_1x_2...x_n$ dont la partie entière e a un chiffre et la partie décimale n chiffres, on obtient, au bout d'au plus $2n$ étapes un entier à un chiffre. En effet, les divisions par 0,9 diminuent chaque fois d'une unité le nombre de décimales et les additions et soustractions maintiennent la partie entière à un chiffre.

III - La construction

Après avoir construit le cercle C de centre O et de rayon R, on effectue le travail préliminaire suivant :

- On trace, à partir d'un point A situé sur le cercle (C), la droite Ax passant par O et qui coupe le cercle C en B.
- On trace la droite Oy perpendiculaire à Ax.
- A partir d'un point Y quelconque de la droite Oy, on trace la droite perpendiculaire à Oy, sur laquelle on porte à partir du point Y, et bout à bout, 10 segments égaux de longueur quelconque, $[DE]$ étant le segment le plus éloigné de Y. Cette graduation a uniquement pour but l'utilisation d'homothéties de rapport 0,9.

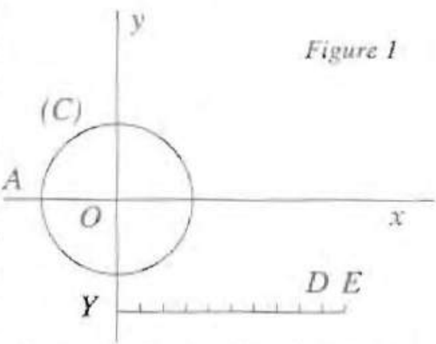

Figure 1

Chaque étape de la construction suivante correspond à une ligne du tableau n°2.

Première étape : On trace la droite (BE) qui coupe la droite (Oy) en un point I, la droite (ID) coupe alors l'axe (Ox) en un point F ; puisque $OB = R$, on a par homothétie $OF = 0,9R$.

Deuxième étape : Sur l'axe Ox, on construit le point G tel que $FG = 1R$, on a donc $OG = 1,9R$.

Troisième étape : On trace la droite (EG) qui coupe la droite (Oy) en un point J, la droite (JD) coupe alors l'axe Ox en un point H et on a par homothétie $OH = 0{,}9OG = 1{,}71R$.

Figure 2

On poursuit les constructions suivant les lignes du tableau n°2.

...

Dixième et dernière étape : Après l'obtention du point M de l'axe Ox tel que $OM = 7{,}14159R$, en portant bout à bout 4 rayons à partir de M vers la gauche, on construit le point N tel que $ON = 3{,}14159R$.

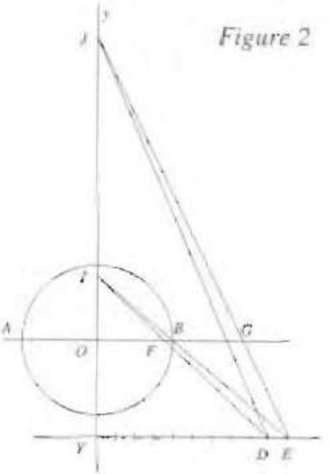

Figure 2

On construit le milieu K du segment $[AN]$, puis le cercle de centre K et de diamètre $[AN]$, ce cercle coupe (Oy) en un point P. Dans le triangle rectangle APN, on a $OP^2 = OA \times ON$, d'où

$$OP = \sqrt{3{,}14159}\,R.$$

Ainsi, $[OP]$ est le côté d'un carré $PQSO$ qui fournit une quadrature approchée du cercle (C).

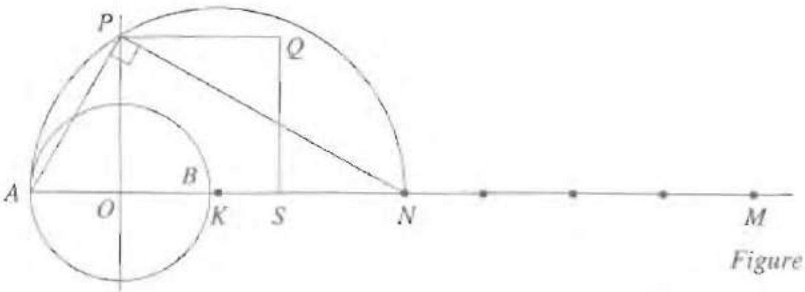

Figure 3

La droite (AP) coupe le cercle (C) en un point Z, la droite (OZ) est alors un lieu géométrique qui permet d'effectuer immédiatement la quadrature approchée de n'importe quel nouveau cercle de centre O. En effet, si (C') est un cercle de centre O et de rayon R' qui coupe la droite Ox en A' et B', ce cercle coupe la droite (OZ) en un point Z', la droite $(A'Z')$ coupe alors la droite (Oy) en un point

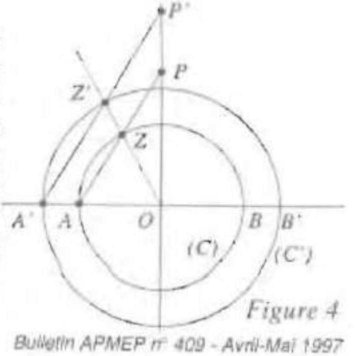

Figure 4

P' et on a par homothétie de centre *O* : $OP' = \sqrt{3{,}14159}\, R'$

Remarques :

1 - A la place d'une approximation décimale de π, nous aurions pu partir directement d'une approximation décimale de $\sqrt{\pi}$, par exemple $\sqrt{\pi} \approx 1{,}772\,45$. Le procédé des tableaux n° 1 et n°2 conduit alors directement à la construction d'un segment de longueur $1{,}77245R$, qui est une approximation du côté du carré cherché. Cette façon de procédé évite la construction d'une racine carrée illustrée par la figure 3.

2 - En fait, nous avons choisi le problème de la quadrature du cercle pour illustrer notre méthode, mais celle-ci est générale. Elle permet la construction de tout segment ayant pour longueur un nombre décimal, quel que soit le nombre de décimales de ce nombre.