

Etude d'une itération en géométrie du triangle

G. Bourgeois et J.-P. Lechêne

Faculté de Luminy - Marseille

Soit un cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon R .

On choisit 3 points *distincts* A, B, C sur le cercle \mathcal{C} formant un triangle de centre de gravité G ; $(AG), (BG)$ et (CG) recoupent \mathcal{C} en A_1, B_1 et C_1 formant un triangle de centre de gravité G_1 .

En itérant le processus, on forme une suite de triangles $(A_n, B_n, C_n)_n$ (sommets ordonnés) de centre de gravité G_n . On constate, en s'armant d'une règle et d'un compas, que les deux suites extraites $(A_{2n}, B_{2n}, C_{2n})_n$ et $(A_{2n+1}, B_{2n+1}, C_{2n+1})_n$ tendent chacune vers un triangle équilatéral et ces suites sont pratiquement stationnaires au bout de quelques itérations. C'est cependant une autre paire de manches que de le montrer effectivement.

Ce problème nous a été posé récemment par G. CAMGUILHEM, mais C. TISSERON a eu la même idée lors de la parution de l'énoncé 117 des problèmes de l'APMEP (*les 200 premiers problèmes de l'APMEP*, volume 2, page 164). Cet énoncé demandait de trouver ABC connaissant A_1, B_1, C_1 ; on trouve généralement deux solutions. On pourra vérifier en particulier que $A_1B_1C_1$ isocèle n'entraîne pas forcément ABC isocèle ! (cf. [1]).

En général, dans ces problèmes d'itération, on ne peut se contenter d'un raisonnement géométrique; il faut faire aussi de l'analyse plus ou moins fine, même si on ne s'intéresse pas à la vitesse de convergence. On pourra se

Bulletin APMEP n° 409 - Avril-Mai 1997

reporter, par exemple, à l'avis de recherche n° 13 de l'APMEP qui semble de difficulté comparable. Les méthodes géométriques à utiliser ne sont pas forcément les mêmes que dans les problèmes de géométrie "statique". Nous ne voyons pas, par exemple, comment on pourrait utiliser les résultats de l'énoncé 117 pour résoudre celui-ci.

La solution proposée comprend deux parties : l'une à dominante "géométrie", montrant que $G_n \rightarrow O$ et que $\widehat{A}_n, \widehat{B}_n$ et \widehat{C}_n tendent vers 60° ; l'autre à dominante "analyse" montrant que le triangle (A_{2n}, B_{2n}, C_{2n}) a une limite (il ne tourne pas!) et que sa convergence est d'ordre 2 comme dans la méthode de Newton.

Première partie

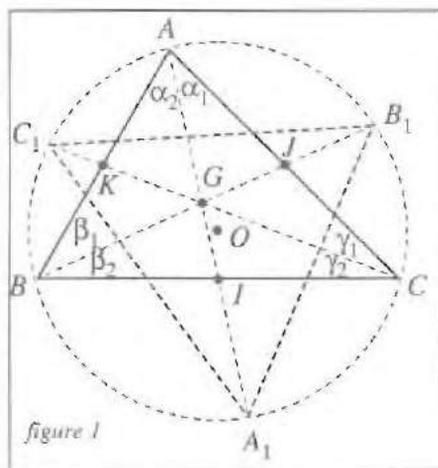
On définit: $a = BC, b = CA, c = AB$ et I, J, K les milieux des côtés de ABC . Les angles $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sont définis sur la figure 1.

$$\widehat{C}_1 = \alpha_1 + \beta_1$$

$$\widehat{A}_1 = \beta_1 + \gamma_1$$

$$\widehat{B}_1 = \alpha_1 + \gamma_1$$

(même si ABC possède un angle obtus).



Supposons (comme sur la figure) $\widehat{A} \geq \widehat{B} \geq \widehat{C}$;
alors $\sin \widehat{A} \geq \sin \widehat{B} \geq \sin \widehat{C}$ (même si \widehat{A} est obtus).

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \text{ entraîne alors } a \geq b \geq c.$$

$$AI^2 = \frac{1}{4} [b^2 + c^2 + 2bc \cos \widehat{A}], \quad BJ^2 = \frac{1}{4} [a^2 + c^2 + 2ac \cos \widehat{B}]$$

$$CK^2 = \frac{1}{4} [a^2 + b^2 + 2ab \cos \widehat{C}] \text{ entraînent } AI \leq BJ \leq CK.$$

$b \geq c \Rightarrow A$ est à gauche de Δ la médiatrice de $[BC] \Rightarrow A_1$ est à droite de

$$\Delta \Rightarrow BA_1 \geq A_1C \Rightarrow \alpha_2 \geq \alpha_1.$$

De même $\beta_2 \geq \beta_1$ et $\gamma_2 \geq \gamma_1$.

$$\widehat{A}_1 = \beta_2 + \gamma_1 \geq \gamma_1 + \frac{\widehat{B}}{2} \geq \frac{\widehat{C}}{2} \geq \gamma_1 + \gamma_2 = \widehat{C}.$$

$$\left. \begin{array}{l} AC_1 \geq C_1B \Rightarrow GA \leq GB \Rightarrow \beta_2 \leq \alpha_2 \\ BA_1 \geq A_1C \Rightarrow GB \leq GC \Rightarrow \gamma_2 \leq \beta_1 \\ AB_1 \geq B_1C \Rightarrow GA \leq GC \Rightarrow \gamma_1 \leq \alpha_1 \end{array} \right\} \beta_2 + \gamma_1 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \text{ ou } \widehat{A}_1 \leq \widehat{A}$$

d'où : $\widehat{C} \leq \widehat{A}_1 \leq \widehat{A}$.

$$\text{De même : } \left. \begin{array}{l} \widehat{B}_1 = \alpha_2 + \gamma_2 \leq \alpha_2 + \gamma_1 \leq \alpha_2 + \alpha_1 = \widehat{A} \\ \widehat{B}_1 \geq \gamma_2 + \alpha_1 \geq \gamma_2 + \gamma_1 = \widehat{C} \end{array} \right\} \text{et } \widehat{C} \leq \widehat{B}_1 \leq \widehat{A}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{C}_1 = \alpha_1 + \beta_1 \geq \gamma_1 + \gamma_2 = \widehat{C} \\ \widehat{C}_1 \leq \alpha_1 + \frac{\widehat{A}}{2} \leq \widehat{A} \end{array} \right\} \text{et } \widehat{C} \leq \widehat{C}_1 \leq \widehat{A}$$

Ainsi, si on pose $M_n = \text{Sup}(\widehat{A}_n, \widehat{B}_n, \widehat{C}_n)$ et $m_n = \text{Inf}(\widehat{A}_n, \widehat{B}_n, \widehat{C}_n)$ alors $(m_n)_n$ est croissante et $(M_n)_n$ est décroissante. Comme $m_n \leq M_n$, les deux suites convergent : $\lim m_n = \lambda$ et $\lim M_n = \mu$ avec $0 < \lambda < \mu$ et $\lambda + \mu < 180^\circ$. D'où, à une isométrie près, une forme triangle limite car le troisième angle tend vers $180^\circ - \lambda - \mu \in [\lambda, \mu]$. On appelle encore ABC un triangle de cette forme et on lui applique la construction de $A_1B_1C_1$.

Soient : $\lambda_1 = \text{Inf}(\widehat{A}_1, \widehat{B}_1, \widehat{C}_1)$ et $\mu_1 = \text{Sup}(\widehat{A}_1, \widehat{B}_1, \widehat{C}_1)$.

$(A, B, C) \mapsto [(A, B, C), G] \mapsto (A_1, B_1, C_1) \mapsto (\widehat{A}_1, \widehat{B}_1, \widehat{C}_1)$ est une chaîne d'applications continues en des points où A, B, C sont distincts ; d'autre part, $(\widehat{A}_1, \widehat{B}_1, \widehat{C}_1)$ ne dépend que de $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$; on en déduit facilement que l'application $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}) \mapsto (\widehat{A}_1, \widehat{B}_1, \widehat{C}_1)$ est définie et continue en des points où $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ sont non nuls :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0 \text{ tel que } \left(\left| \widehat{A} - \widehat{A}' \right| < \sigma, \dots \right) \Rightarrow \left(\left| \widehat{A}_1 - \widehat{A}'_1 \right| < \varepsilon, \dots \right);$$

$\exists n_0 > 0$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq \lambda - m_n < \sigma$ et $0 \leq M_n - \mu < \sigma$.

Ainsi $n \geq n_0 \Rightarrow |m_{n+1} - \lambda_1| < \varepsilon$ et $|M_{n+1} - \mu_1| < \varepsilon$ d'où, en passant à la limite: $|\lambda - \lambda_1| \geq \varepsilon$ et $|\mu - \mu_1| \leq \varepsilon$.

Comme ε peut être choisi aussi petit que l'on veut, on obtient $\lambda = \lambda_1$ et $\mu = \mu_1$ et les angles ordonnés $(\widehat{A}_1, \widehat{B}_1, \widehat{C}_1)$ réalisent une permutation de $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$.

Remarque : $\widehat{A}_1 = \widehat{BGC} - \widehat{A}$, $\widehat{B}_1 = \widehat{CGA} - \widehat{B}$, $\widehat{C}_1 = \widehat{AGB} - \widehat{C}$.

Premier cas : La permutation a au moins un point fixe.

par exemple $\widehat{A}_1 = \widehat{A}$ alors $\widehat{BGC} = 2\widehat{A}$ d'où deux sous-cas :

a) $\widehat{B}_1 = \widehat{B}$ et $\widehat{C}_1 = \widehat{C}$: $\widehat{AGB} = 2\widehat{C}$, $\widehat{AGC} = 2\widehat{B}$.

Par intersection des arcs capables, on en déduit $G = O$ et ABC **équilatéral**.

b) $\widehat{B}_1 = \widehat{C}$ et $\widehat{C}_1 = \widehat{B}$: $\alpha_2 = \gamma_1$, et $\alpha_1 = \beta_2$.

$\widehat{AGB} = \widehat{C} + \widehat{B}$ et $\widehat{AGC} = \widehat{C} + \widehat{B}$; ainsi (AG) est bissectrice de \widehat{BGC} et $BG = GC$, $(AG) \perp (BC)$, $BA = AC$ d'où $\alpha_2 = \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_1$, $\beta_1 = \gamma_2$, $GA = GB$, $CA = CB$ et enfin ABC **équilatéral** et $G = O$.

Deuxième cas : la permutation n'a pas de point fixe.

par exemple : $\widehat{A}_1 = \widehat{B}$, $\widehat{B}_1 = \widehat{C}$, $\widehat{C}_1 = \widehat{A}$.

On considère U, V, W tels que $BGCU$, $CGAV$ et $AGBW$ soient des parallélogrammes.

$\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{CGA} \Rightarrow \widehat{AGW} = \widehat{A} \Rightarrow \widehat{BWG} = \widehat{A}$

et $\widehat{BWC} = \widehat{BAC}$.

Ainsi W est sur \mathcal{C} ; de même U et $V \in \mathcal{C}$.

G est le milieu des cordes $[CW]$ et $[BV]$

donc $G = O$ et ABC est **équilatéral**.

Conclusion : $\widehat{A}_n, \widehat{B}_n, \widehat{C}_n \mapsto 60^\circ$ et $G_n \mapsto O$.

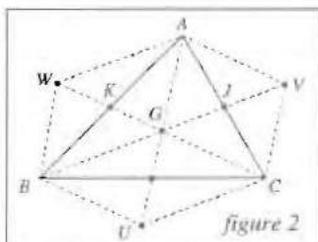


figure 2

Deuxième partie

(on notera maintenant a_n, b_n, c_n les longueurs des côtés de $A_n B_n C_n$).

On utilisera les notations de Landau pour les suites :

Le fait que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ soient deux suites qui vérifient : pour tout ε , il existe n_0 tel que $|u_n| \leq \varepsilon |v_n|$ pour $n \geq n_0$ (resp : il existe M tel que $|u_n| \leq M |v_n|$ pour tout n) est noté $u_n = o(v_n)$ (resp : $u_n = O(v_n)$).

D'autre part, on dit que $u_n \sim v_n$ si $u_n - v_n = o(v_n)$.

Exemple : si h_n, k_n, l_n tendent vers 0, on peut écrire ce qui suit :

$$2|h_n k_n| \leq h_n^2 + k_n^2 \text{ donc } h_n k_n = O(h_n^2 + k_n^2) = O(h_n^2 + k_n^2) l_n^2 ;$$

on en déduit (*) : $h_n k_n l_n = o(h_n^2 + k_n^2 + l_n^2)$

$$\text{et (***) : } h_n k_n + k_n l_n + l_n h_n = O(h_n^2 + k_n^2 + l_n^2).$$

1°) On montre dans ce paragraphe que $OG_{n+1} = O(OG_n^2)$ [calculateurs, à vos stylos!] :

On pose : $a_n^2 = 3R^2 + h_n$, $b_n^2 = 3R^2 + k_n$ et $c_n^2 = 3R^2 + l_n$ où $h_n, k_n, l_n \rightarrow 0$.

Les résultats suivants sont laissés au lecteur :

Si $\sigma_1 = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2$, $\sigma_2 = a_n^2 b_n^2 + a_n^2 c_n^2 + b_n^2 c_n^2$ et $\sigma_3 = a_n^2 b_n^2 c_n^2$, alors

$$1/ \quad OG_n^2 = R^2 - \frac{1}{9} \sigma_1$$

$$2/ \quad \frac{\sigma_3}{R^2} = 4 \sigma_2 - \sigma_1^2$$

$$3/ \quad OG_{n+1}^2 = R^2 - \frac{1}{9} \sigma_1^2 \frac{6 \sigma_2 - \sigma_1^2}{-4 \sigma_1^3 + 18 \sigma_1 \sigma_2 + 27 R^2 \sigma_1^2 - 108 R^2 \sigma_2}$$

D'après 2/ :

$$3R^2 (h_n + k_n + l_n) = (h_n k_n + k_n l_n + h_n l_n) - \frac{h_n k_n l_n}{R^2} - (h_n + k_n + l_n)^2$$

On pose $h_n + k_n + l_n = -\lambda_n$; alors $\sigma_1 = 9R^2 - \lambda_n$

Remarque :

Si $\lambda_n = 0$, alors $\sigma_1 = 9R^2$ et $G_n = O$; ceci ne peut arriver que si $G_{n+1} = O$, d'où, en remontant, que si ABC est équilatéral.

On peut donc supposer $\lambda_n \neq 0$.

$$h_n^2 + k_n^2 + l_n^2 = \lambda_n^2 - 2(h_n k_n + h_n l_n + k_n l_n) = O(h_n k_n + h_n l_n + k_n l_n) + o(\lambda_n) ;$$

d'où $h_n k_n l_n = o(h_n k_n + h_n l_n + k_n l_n) + o(\lambda_n)$ à l'aide de (*).

Alors $-3R^2\lambda_n - (h_n k_n + h_n l_n + k_n l_n) - \frac{h_n k_n l_n}{R^2} - h_n k_n + h_n l_n + k_n l_n$

et $h_n^2 + k_n^2 + l_n^2 - 6R^2\lambda_n$

$$\begin{aligned} (|h_n| + |k_n| + |l_n|)^2 &= O(\lambda_n) + 2(|h_n k_n| + |h_n l_n| + |k_n l_n|) \\ &= O(\lambda_n) + o(h_n^2 + k_n^2 + l_n^2) \text{ d'après (**)} \\ &= O(\lambda_n). \end{aligned}$$

$$|h_n k_n l_n| \leq (|h_n| + |k_n| + |l_n|)(h_n^2 + k_n^2 + l_n^2) = O(\lambda_n^{3/2})$$

et enfin : $h_n k_n + k_n l_n + l_n h_n = -3R^2\lambda_n + \tau_n$ avec $\tau_n = O(\lambda_n^{3/2})$

$\sigma_2 = 27R^4 - 9R^2\lambda_n + \tau_n$ s'en déduit facilement.

de 1/, on déduit : $OG_n^2 = \frac{\lambda_n}{9}$

et de 3/, on déduit : $OG_{n+1}^2 = R^2 - \frac{1}{9} E$ avec $E =$

$$\begin{aligned} &\frac{(81R^4 - 18R^2\lambda_n + O(\lambda_n^3))(162R^4 - 54R^2\lambda_n + 6\tau_n - 81R^4 + 18R^2\lambda_n + O(\lambda_n^3))}{-4(729R^6 - 243R^4\lambda_n + O(\lambda_n^3)) - 18(9R^2\lambda_n - 27R^4 - 9R^2\lambda_n + \tau_n) + 27R^2(81R^4 - 18R^2\lambda_n + O(\lambda_n^3)) - 108R^2(27R^4 - 9R^2\lambda_n + \tau_n)} \\ &= \frac{6561R^8 - 4374R^6\lambda_n + 486R^4\tau_n + O(\lambda_n^3)}{729R^6 - 486R^4\lambda_n + 54R^2\tau_n + O(\lambda_n^3)} = 9R^2 + O(\lambda_n^2). \end{aligned}$$

Ainsi $OG_{n+1}^2 = O(\lambda_n^2)$, et $OG_{n+1} = O(OG_n^2)$

(convergence d'ordre 2 : le nombre de chiffres significatifs de la limite est multiplié par 2 à chaque itération).

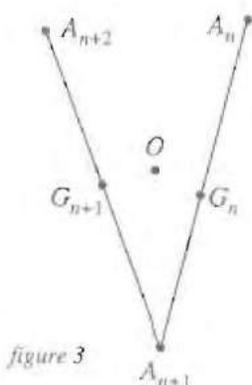


figure 3

Pour n grand, G_n et G_{n+1} sont voisins de O donc G_n et G_{n+1} sont voisins des milieux de $[A_n A_{n+1}]$ et $[A_{n+1} A_{n+2}]$: ainsi $G_n G_{n+1}$ est voisin de $1/2 (A_n A_{n+2})$: pour n assez grand, $A_n A_{n+2} \leq G_n G_{n+1}$ (cf. fig. 3)

Si $p \in \mathbb{N}^*$:

$$A_n A_{n+2p} \leq 3(G_n G_{n+1} + G_{n+2} G_{n+3} + \dots + G_{n+2p-2} G_{n+2p-1})$$

$$\leq \sum_{k=n}^{n+2p-2} G_k G_{k+1} \leq 3 \sum_{k=n}^{n+2p-2} (OG_k + OG_{k+1}) \leq 6 \sum_{k=n}^{n+2p} OG_k.$$

$OG_{k+1} \leq \frac{1}{2} OG_k$ (pour k assez grand) entraîne que :

$$A_n A_{n+2p} \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = 2 (OG_n)$$

Ainsi, la suite $(A_{2n})_n$ est de Cauchy, donc converge vers $A_\infty \in \mathcal{C}$ tel que $A_{2n} A_\infty \leq 12(OG_{2n})$ (convergence ultra rapide. De même $A_{2n+1} \mapsto A'_\infty$ symétrique de A_∞ par rapport à O).

Epilogue

i) Voici le listing d'un petit programme écrit pour une calculatrice TI85, qui illustre notre propos.

On choisit le mode "DEGREE", on rentre les trois angles polaires (en degrés) des sommets du triangle original; chaque appui sur "ENTER" fournit les valeurs de OG_n^2 et des angles polaires des sommets des triangles itérés.

Le lecteur pourra se convaincre ainsi de la convergence d'ordre 2.

Nous mêmes, avons eu l'idée de montrer la convergence d'ordre 2 après avoir fait tourner ce programme.

```
Prompt A1, A2, A3
CosA1 ↪ X1
sinA1 ↪ Y1
cosA2 ↪ X2
sinA2 ↪ Y2
cosA3 ↪ X3
sinA3 ↪ Y3
2 ↪ D1
Lbl Z1
(X1 + X2 + X3) / 3 ↪ XG
(Y1 + Y2 + Y3) / 3 ↪ YG
XG ^ 2 + YG ^ 2 ↪ D
DISP D
D ↪ D1
```

```

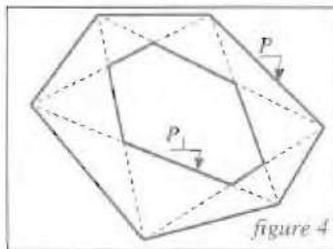
DISP angle (X1, Y1)
DISP angle (X2, Y2)
DISP angle (X3, Y3)
Pause
(1 - D)/(XG - X1) ^ 2 + (XG - Y1) ^ 2 ↦ U
XG + U*(XG - X1) ↦ X1
YG + U*(YG - Y1) ↦ Y1
(1 - D)/(XG - X2) ^ 2 + (XG - Y2) ^ 2 ↦ U
XG + U*(XG - X2) ↦ X2
YG + U*(YG - Y2) ↦ Y2
(1 - D)/(XG - X3) ^ 2 + (YG - Y3) ^ 2 ↦ U
XG + U*(XG - X3) ↦ X3
YG + U*(YG - Y3) ↦ Y3
GO TO Z1.

```

ii) Rien n'empêche maintenant de fabriquer ses propres itérations et de chercher à savoir ce qui se passe.

Voici quelques exemples :

- a) Dans le cas qui nous occupe, on peut remplacer "G isobarycentre" par "G barycentre de $A(p), B(q), C(r)$ ", mais ce n'est sans doute pas un cadeau!
- b) *beaucoup plus facile* : si ABC est un triangle, on lui associe le triangle $A_1B_1C_1$ dont les sommets sont les pieds des bissectrices intérieures de ABC ; en itérant le procédé, montrer qu'on obtient une "forme limite" qui est celle d'un triangle équilatéral (la vitesse de convergence est géométrique) (voir [2]).
- c) *Plus difficile* : soit P un polygone strictement convexe à n côtés ($n \geq 5$) ; on joint chaque sommet de P aux deux sommets obtenus en sautant le premier sommet rencontré (cf. fig.4) ; on obtient ainsi un polygone P_1 . Montrer que, si on itère le procédé, P_n s'écrase en un point (vitesse géométrique) (voir [3]).



Bibliographie

- [1] Parry : *The mathematical gazette*, volume 75, n°472, page 151, Juin 1991.
 [2] Jones : *The mathematical gazette*, volume 74, n° 467, page 59, Mars 1990.
 [3] Schwartz R., *The pentagram map : Experimental mathematics*, volume 1, n°1 (!!!), page 71, 1992.