Des courbes à la loupe Image calculée et ordre de grandeur

G. Kuntz
IREM de Strasbourg

1 - Introduction

L'informatique ne peut pas tout. Si on lui confie sans réflexion préalable le soin de tracer la courbe représentative d'une fonction, il arrive qu'elle affiche une image fausse, amputée d'éléments significatifs ou tout simplement illisible (nuage de points). Il importe de rendre les élèves attentifs à ces faits et de leur faire comprendre l'origine des anomalies observées. Une de leurs causes majeures réside dans la difficulté de traiter simultanément des nombres dont l'ordre de grandeur est très (trop) différent. Les deux activités proposées dans cet article visent à dépasser l'échec de certaines représentations graphiques sur ordinateur par une réflexion préalable sur les ordres de grandeur des réels traités dans le calcul de l'image. Au cours de ces travaux, les élèves mettent en œuvre des outils, des objets et des concepts d'importance capitale dans la démarche scientifique : la proportionnalité (omniprésente et très mal maîtrisée dès que l'on quitte les cas banals), la conservation des rapports dans une transformation, les nombres très grands ou très voisins de zéro et la comparaison de leur ordre de grandeur. Cette activité ravit les collègues physiciens pour qui l'ordre de grandeur d'un résultat est primordial.

Elle introduit (ou consolide) la très délicate notion de limite que les élèves rencontrent en Première.

2 - Le contexte de l'expérimentation

Depuis plusieurs années, au lycée Couffignal de Strasbourg, deux heures par quinzaine d'informatique appliquée aux mathématiques ont été intégrées à l'emploi du temps d'une classe de volontaires de Première S. Ils apprennent à conjecturer avec Graph'x, Derive et Cabri-Géomètre. Ils découvrent la puissance et les limites de l'outil informatique ainsi que certains problèmes nés de son utilisation [2].

Les travaux sur lesquels est fondé l'article ont été réalisés dans cette classe en tout début de l'année scolaire 1995/96 (les élèves ne disposaient alors que des connaissances de Seconde). Ils nécessitent de constants allers et retours entre l'écran graphique, la calculatrice numérique et le "papier-crayon". Quatre heures ont été consacrées à l'étude en binômes de chacun des deux textes proposés et à la rédaction d'un compte rendu d'activité. Ce document, capital pour s'assurer de ce qu'un élève a réellement compris, sert de base à cet article.

Le logiciel Graph'x a été choisi pour ces travaux parce qu'il oblige à préciser des paramètres qui sont d'habitude pris en charge, de façon transparente, par la calculatrice ou le logiciel (unités, position de l'origine, pas du partage). Cette apparente rusticité est un atout très important dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques. Le logiciel transfère aux élèves des activités intellectuelles profondément formatrices. L'observation de la classe confirme l'intensité du travail : la concentration, l'incessante discussion dans les binômes et entre eux ainsi qu'une fréquente sollicitation de l'enseignant, voilà des signes qui ne trompent pas! On est loin d'une classe faisant joujou avec l'ordinateur.

a - Gare aux détails

Voici le premier des deux textes proposés.

1°) On donne $f(x) = x^3 - 0{,}0101x^2 + 0{,}000001x$. Utilisez GRAPH'X pour faire un tracé de Cf. Quelle conjecture faites-vous sur les variations de f sur l'ensemble des réels ?

2°) Prouvez que $f(x) = x(x - 0{,}01)(x - 0{,}0001)$. Résolvez l'équation $f(x) = 0$. Comparez avec les conjectures précédentes. Sur quels intervalles est-il intéressant de représenter f ? Faites-le. Quelles nouvelles conjectures en déduisez-vous quant aux variation de f ? Dressez son tableau de variations. Est-il sûr ?

Vous indiquerez dans le compte rendu les allures de Cf dans les différents intervalles mis en évidence.

1) - *Analyse a priori de l'activité*

L'activité consiste à montrer que des détails échappent dans certaines solutions à l'image calculée. Une factorisation met en évidence des intervalles sur lesquels il est intéressant de "zoomer" pour que ces "détails" apparaissent à l'écran.

Elle repose sur la proportionnalité. Le choix d'intervalles successifs conduit les élèves à travailler avec des nombres très grands ou très voisins de zéro, et particulièrement avec des puissances de dix (qui leur posent bien des problèmes).

2) - *Le déroulement de l'activité : confirmation et surprises*

a) L'échec des stratégies ludiques

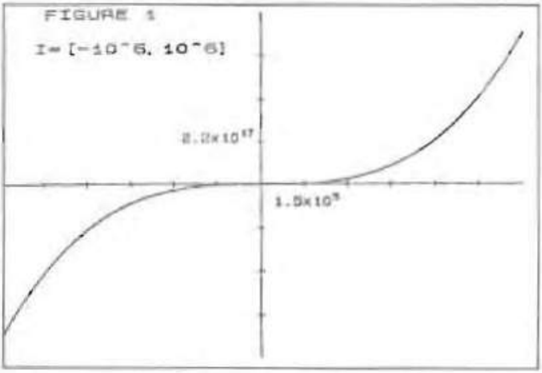
Les élèves cherchent à représenter f sur le plus grand intervalle possible (ils savent que l'ordinateur ne travaille qu'avec certains décimaux d'un segment [–M,M]. Par tâtonnement, ils trouvent $[-10^6, 10^6]$ (au-delà, le logiciel annonce un dépassement de capacité).

Les difficultés commencent avec le choix des unités. Malgré une information préalable, les élèves conservent des valeurs par défaut (1 cm sur Ox et Oy) totalement inadaptées aux circonstances ! Sanction immédiate : l'écran reste vide.

Après un premier diagnostic, la plupart des binômes cherchent à ajouter les unités par tâtonnement. Faut-il augmenter ou diminuer l'unité par défaut ? Dans quelles proportions ? Bien entendu, nul ne sait. Et il ne vient à personne l'idée de **calculer** les unités! (la démarche raisonnée avait pourtant été mise en œuvre dans une séance précédente).

L'échec généralisé des tentatives "au hasard" oblige les élèves à exhumer la méthode de calcul. Et c'est sur la proportionnalité qu'ils viennent butter. La longueur de l'intervalle d'étude est de 2×10^6 unités, celle de l'écran de 26 cm. Quelle est la valeur de l'unité exprimée en centimètres ? De longues minutes sont nécessaires pour que les premiers groupes aboutissent (ils savent qu'il faut diviser, mais dans quel sens?) Le résultat a de quoi déconcerter : l'unité est de $13/10^6$ cm !

Comment choisir l'unité sur Oy? Certains prennent la même que sur Ox (repère orthonormé oblige...) et l'écran reste obstinément vide. Les modifications par tâtonnement échouent. Contrairement à Ox sur lequel on connaissait les intervalles de départ et d'arrivée, on ne sait pas, sur Oy, quel intervalle appliquer sur les 18 cm de l'écran. «Il faudrait connaître le maximum et le minimum de $f(x)$ sur l'intervalle» suggère un élève. Mais, pour cela, il faudrait connaître les variations de f, que l'étude se propose de mettre en évidence ! L'idée de programmer f sur calculatrice est longue à venir. Elle fournit des ordres de grandeur de $f(x)$. $f(10^6)$ est de l'ordre de 10^8. L'unité calculée vaut alors 9×10^{-18} cm. Une courbe apparaît enfin à l'écran. *(Figure 1)*



C'est le moment de réfléchir aux échecs essuyés dans un premier temps et d'épingler le ridicule des unités égales à 1 cm sur les deux axes... Il est aussi possible de comprendre l'inadéquation d'un repère orthonormé au tracé recherché.

b) Des remarques d'élèves à saisir au vol...

Deux remarques relancent alors la réflexion.

«$f(-10^6)$ est presque le cube de -10^6, et c'est la même chose pour $f(10^6)$» (un autre traduit cette remarque en disant que la calculatrice calcule seulement le premier terme de $f(x)$»).

Tous conjecturent que f est croissante sur l'intervalle, mais plusieurs s'inquiètent de voir que «la courbe se superpose à Ox sur un intervalle» dont ils estiment la longueur, d'ailleurs considérable. «f serait alors nulle sur cet intervalle !» Cette remarque est accueillie par un large scepticisme... Elle sera traitée plus loin, par changement d'intervalle d'étude.

Le calcul "à la main" de $f(10^6)$ fait apparaître trois termes dont les deux derniers sont **négligeables** par rapport au premier. L'adjectif, issu du vocabulaire de la physique, est capital (il a été proposé par un élève). Il permet d'expliquer la remarque initiale. Il convient de l'approfondir en comparant, tout au long de l'intervalle $f(x)$ avec x^3.

La grandeur significative n'est pas la différence des deux nombres, mais le quotient de cette différence par $f(x)$: *c'est l'erreur relative du physicien.* Programmée sur les calculatrices elle croît de 10^{-8} à 10^{-3} quand x varie de 10^6 à 10. Ces erreurs sont considérées comme très faibles ou faibles. Cette réflexion conduit à tracer simultanément les courbes de f et de $y = x^3$ à l'écran : *la superposition est parfaite, y compris dans la coïncidence avec Ox.* La superposition des deux courbes avec Ox sur un intervalle important fournit un début de réponse à la question de la nullité de f sur cet intervalle. «x^3 ne s'annule qu'en O, donc la coïncidence de sa courbe avec Ox sur tout un intervalle n'est pas vraie.» Il faudra trouver ultérieurement une explication à cette contradiction.

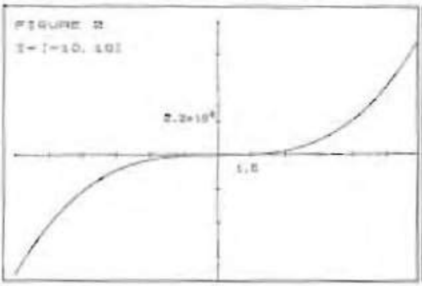
c) Pensée d'enseignant en cours d'expérience

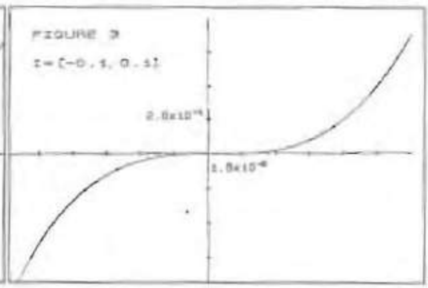
Tout ce qui a été mis en évidence jusque là s'écarte du but premier du texte proposé : ces incidentes ont pris plus d'importance (physique et mathématique, théorique et pratique) que la question initiale. L'auteur de l'activité estimait, à tort, que la difficulté de ces considérations dépasserait les élèves. Il y a de bonnes surprises dans l'enseignement!

Les outils sont maintenant en place. La suite du travail va aller beaucoup plus vite.

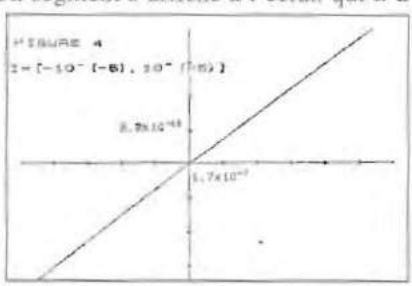
c) Une exploration pleine de surprises autour de zéro

Pour tenter de lever l'hypothèque de la nullité de f autour de O, les élèves diminuent l'intervalle : la plage de nullité apparente recule, mais persiste, y compris si l'intervalle d'étude est $[-1\ ,\ 1]$, ou même $[-0.1\ ;\ 0.1]$ *(figures 2 et 3)* La plupart renoncent à aller plus loin. Il faut l'audace d'un binôme qui s'aventure sur $[-10^{-6}\ ;\ 10^{-6}]$ pour que l'image, d'une répétitivité





lassante change brutalement d'allure! Un segment s'affiche à l'écran qui n'a avec Ox qu'un point commun : O *(Figure 4)* Une fonction clairement croissante ! Emoi dans la salle. Les autres essaient (certains pataugent à nouveau dans les unités qui ont beaucoup changé...) et confirment. Mais d'où diable sort ce segment?



Le franc décollage du segment par rapport à Ox doit être nuancé. $f(10^{-6})$ vaut 10^{-12} environ... (Ce calcul a permis celui de l'unité sur Oy qui vaut maintenant 9×10^{12} cm !).

C'est, une fois encore, *le calcul "à la main"* qui donne le fin mot de l'histoire. Pour les valeurs de x très voisines de zéro, les deux premiers termes de $f(x)$ sont négligeables face au troisième. $f(x)$ est donc très peu différents de $10^{-6}\times x$ qui est linéaire.

On peut affirmer en calculant, comme précédemment, l'erreur relative commise en remplaçant $f(x)$ par cette valeur approchée : elle est d'autant plus voisine de zéro qu'x l'est. On dira un peu plus tard qu'elle tend vers 0 quand x tend vers 0.

On note au passage que le phénomène est un peu masqué par la présence du coefficient de x, 10^{-6} ; c'est la raison de l'apparition tardive, pour un intervalle très petit, du segment de droite.

e) Une conclusion assurée, aussitôt remise en cause

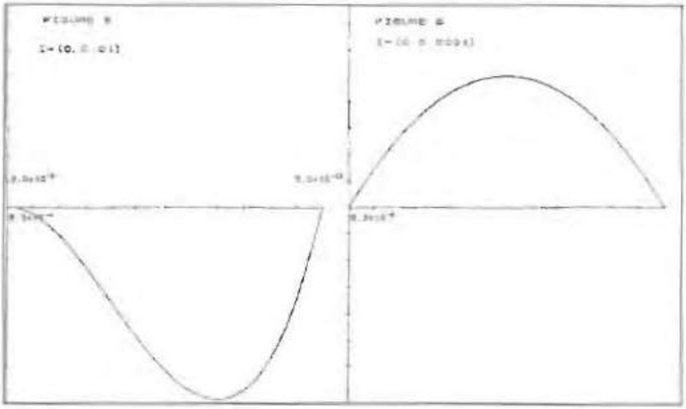
Fort de leur réussite dans cette difficile course d'obstacles, les élèves rédigent une conjecture qui ne fait plus guère de doute dans leur esprit : la fonction f semble strictement croissante sur l'ensemble des réels (on ne peut certes rien dire en dehors de $[-10^6; 10^6]$, mais cela ne trouble personne). C'est alors que la factorisation de $f(x)$ remet tout en question : si f s'annule en 0, 0.0001 et 0.01, elle ne saurait être strictement croissante !

f) Une stratégie qui bute sur les ordre de grandeur

Les élèves tentent de construire la courbe dans l'intervalle [0 ; 0,01]. Jusque là, ils estimaient $f(x)$ aux bords de l'intervalle d'étude pour calculer les unités en Oy. Mais ici, ces valeurs sont nulles... Il faut du temps pour qu'ils essaient de prendre x au milieu (par exemple) de l'intervalle ($x = 0{,}005$). La courbe obtenue étonne. La fonction associée est décroissante, puis croissante.

Il faut signaler ici le raisonnement intéressant, mais erroné d'un élève : l'intervalle d'étude étant "petit", on peut remplacer $f(x)$ par le terme prépondérant $10^{-6}\times x$. Or, bien que l'intuition soit juste, le raisonnement échoue sur la forme particulière des coefficients intervenant dans $f(x)$. Pour $x = 0{,}01$, le terme du premier degré vaut 10^{-8}, celui du second degré $1{,}01\times 10^{-6}$ et celui du troisième degré 10^{-6}. L'intervalle est ici beaucoup trop grand pour que l'approximation proposée soit correcte !

Autre remarque d'importance : au départ, sur plusieurs pixels, la courbe coïncide une fois encore avec Ox *(Figure 5)*. Or, ces quatre ou cinq pixels représentent le centième de la largeur de l'écran VGA, c'est-à-dire, comme par hasard, l'intervalle [0 ; 0,0001] ! Il est donc nécessaire de regarder de plus près cet intervalle, indépendamment de l'intervalle [0 ; 0,001] *(Figure 6)*. Ce qui frappe les élèves, c'est la différence d'unités en Oy sur les deux inter-



valles pour qu'une courbe se dessine : 10^7 pour le premier, 10^{11} pour le second. C'est que les maxima dans les deux intervalles diffèrent considérablement, $2{,}4\times10^{-11}$ pour l'un, $1{,}4\times10^{-7}$ pour l'autre. La nouvelle courbe correspond à une fonction croissante, puis décroissante!

La juxtaposition des deux courbes sur le même écran (figures 5 et 6) est trompeuse : elle livre certes une information qualitative importante sur les variations de f, mais les proportions ne sont pas les mêmes pour les deux graphiques, contrairement à l'impression visuelle. Cette remarque va permettre de comprendre pourquoi de nombreuses parties de courbes ont tendance à épouser Ox.

g) L'étrange attraction de l'axe Ox

Pourquoi les courbes ont-elles tendance à se "coller" sur l'axe Ox? Les élèves commencent à pressentir que les différences d'ordre de grandeur des ordonnées n'y sont pas étrangères. Il faut passer de l'intuition au calcul.

On passe du plan mathématique à l'écran graphique par une transformation qui conserve les rapports ([2] p. 28-29). Soient alors deux points du plan mathématique, d'ordonnées respectives 10^{-7} et 10^{-11} unités. Le rapport de leurs ordonnées à l'écran est de 10^{-4}. Si l'ordonnée du premier correspond à 480 pixels, celle du second sera de 0,048 pixels ! Le pixel allumé est donc le tout premier, celui qui se situe sur Ox. Ainsi s'expliquent les cas de "nullité" observés tout au long de ces travaux (bien entendu, ces calculs et leur interprétation sont faits par les élèves).

3 - Premières conclusions

On voit toute l'importance de relever, de valoriser et de prolonger les remarques des élèves. Elles conduisent à des découvertes essentielles. Elles renseignent aussi sur les problèmes qu'ils sont capables d'envisager au stade actuel : on peut alors développer une question estimée a priori trop difficile.

La première s'énonce ainsi : l'erreur relative commise en remplaçant $f(x)$ par x^3 est d'autant plus voisine de 0 que x est grand (en valeur absolue). On dira un peu plus tard que cette erreur relative tend vers zéro quand x tend vers plus ou moins l'infini. Donc, pour les grandes valeurs de x (en valeur absolue), on peut sans inconvénients remplacer $f(x)$ par x^3.

Même résultat au voisinage de 0 (cette notion doit être précisée, vue la forme particulière des coefficients) où l'on peut assimiler $f(x)$ à son terme du premier degré. Là encore l'erreur relative tend vers zéro avec x.

L'importance du choix d'unités adaptées aux grandeurs à représenter, est clairement apparue dans cette activité. Elle a mis en évidence l'impossibilité d'une représentation simultanée de grandeurs d'ordres trop différents. La nécessité d'une évaluation préalable des ordres de grandeur est ici un passage obligé pour obtenir des tracés significatifs : cette démarche, que les calculatrices avaient rendue obsolète, redevient indispensable pour réaliser des images informatiques ! Juste retour des choses.

Le but premier de l'activité est atteint : les comptes-rendus proposent des conjectures raisonnables pour les variations de f. Ils soulignent le fait que d'autres "détails" auraient pu leur échapper à d'autres endroits de la courbe. Ils rappellent la large tache aveugle de l'ordinateur pour les grandes valeurs de x.

Il est largement dépassé parce qu'il a permis des incidentes d'importance capitale, à partir de questions ou de remarques d'élèves.

D'abord une importante incursion dans l'approximation d'une fonction par des fonctions plus simples, qui changent avec l'ordre de grandeur de la variable. (Le passage de valeurs "exactes" à des valeurs approchées est un des obstacles épistémologiques majeurs du lycée). Excellente préparation à la notion de dérivée, dont une interprétation consiste à remplacer localement une courbe par la droite tangente.

En évaluant les erreurs relatives, on note l'intérêt, pour les minimiser, de donner à x des valeurs aussi grandes ou aussi voisines de 0 que possible. Cette idée, reprise et formalisée, est une intéressante introduction à la notion de limite.

La manipulation des puissances de 10 et des ordres de grandeur a montré les graves faiblesses des élèves dans ces domaines. Il faut leur proposer d'autres exercices (ils sont mieux acceptés dans le cadre informatique, où ils sont ressentis comme un moyen de construire une image, et non comme des exercices "gratuits"). Leur pratique de la proportionnalité, omniprésente dans ces travaux, a été consolidée (elle en avait bien besoin).

Enfin, ces élèves ont commencé à prendre conscience de la complexité d'une image calculée, qui ne livre pas tous ses secrets au regard naïf… C'est le moment d'enfoncer le clou.

b - Dissiper le flou

L'activité qui suit va consolider ces acquis en faisant travailler les élèves sur une courbe qui affole l'écran graphique… En voici le texte.

> 1°) Utilisez Graph'x pour représenter f(x) = sin(1/x) dans]0, 1]. Comment varie f dans cet intervalle?
> 2°) On admet que les solutions de l'équation sin(1/x) = 0 sont les réels 1/kπ, k étant un entier naturel différent de 0. Représentez ces nombres sur la droite des réels. Combien y en a-t-il sur [0 , 1]? Comment se placent-ils? Sur quels intervalles a-t-on intérêt à représenter f?
> 3°) Pour k = 100, puis pour k = 10001, représentez f sur [1/((k+2)π) ; 1/(kπ)]. Essayez des valeurs de k de plus en plus grandes, jusqu'aux limites du logiciel.
> 4°) Proposez une description des variations de f sur]0 ; 1].

1) ***Analyse a priori de l'activité***

C'est la première rencontre des élèves avec une courbe obstinément récalcitrante. Elle résiste, au voisinage de zéro, à tous les zooms : le nuage de points persiste et s'épaissit au fil des tentatives. Aucune courbe globale n'est traçable. Il faut déceler des INTERVALLES (entre deux ou plusieurs racines consécutives) sur lesquels le nuage se dissipe.

Les racines de l'équation sont données aux élèves. Leurs images sont construites (sur papier) sur le segment [0 , 1]. Deux suites sont intéressantes pour cette activité. Celle, mk, des racines de l'équation ($mk = 1/k\pi$) et celle lk, des distances de deux racines consécutives : $lk = 1/(k\pi) - 1/(k+1)\pi = 1/k(k+1)\pi$. Elles deviennent toutes deux voisines de 0 quand k prend de grandes valeurs, mais leurs ordres de grandeurs évoluent de façon très différente avec k (l'ordre de grandeur de la seconde est $1/(k^2\pi)$. Cette situation, très fréquente en mathématiques, prépare les importantes notions de limite et de dérivée.

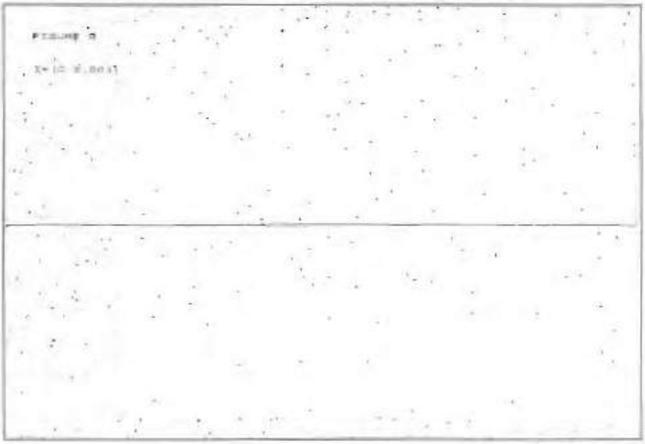
Pour tracer les courbes sur l'écran, il faut, soit changer de repère, soit les translater à l'origine (Graph'x impose des coordonnées entières pour l'origine : une "faiblesse" qui sollicite l'imagination.

Il faut enfin réfléchir à la trompeuse similitude d'aspect des courbes obtenues (les unités sont très différentes quand on passe de l'une à l'autre et les courbes ne sont, malgré les apparences, pas superposables).

2) *L'activité à l'épreuve des faits*

a) *L'acharnement à dissiper le flou*

Les élèves n'en croient pas leurs yeux : l'impossibilité, malgré de multiples essais et des zooms insistants, à faire apparaître une courbe lisible les stupéfie (*figure 9*). Il faut de longues minutes pour qu'ils se rendent à l'évidence : cette courbe ne ressemble à rien de connu (d'eux)!



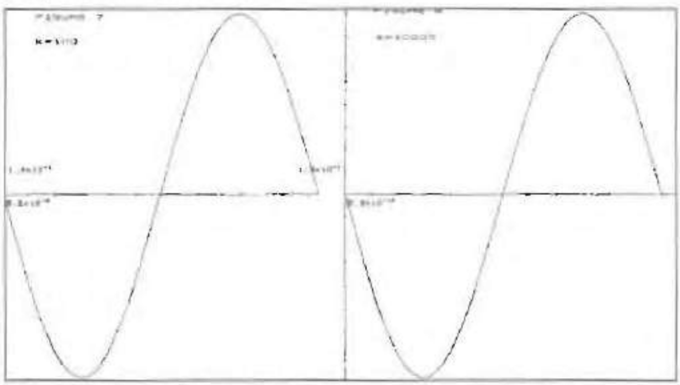
b) *L'échec des démarches naïves*

L'utilisation d'intervalles délimités par les racines de l'équation sin $(1/x) = 0$ leur rappelle la démarche utilisée avec succès dans la première activité. Mais la tentative de représenter la fonction sur l'un des intervalles suggérés aboutit (une fois encore) à un écran vide, malgré un calcul d'unités, à première vue, correct. Les élèves butent sur une difficulté considérable : les bords de l'intervalle sont très voisins de 0, mais sa longueur est négligeable par rapport à sa distance à 0. Par exemple pour $k = 100$, le bord gauche de l'intervalle est $3{,}12\times10^{-3}$ alors que sa longueur vaut $3{,}12\times10^{-5}$. La courbe est donc reléguée à l'extrême droite de l'écran, sur quelques pixels (elle est inexploitable). La situation empire quand k augmente. La programmation des suites mk et lk, et la construction à l'échelle des points correspondants est indispensable pour éclairer la situation.

On comprend alors l'échec des zooms successifs sur cette courbe autour de l'origine : pour qu'un tracé significatif se produise, il faut un lien très précis entre le début de l'intervalle et sa longueur. Un zoom aléatoire n'a aucune chance de remplir cette condition. Et d'ailleurs, comment zoomer avec précision sur des intervalles dont le bord gauche vaut $3{,}18\times10^{-9}$? Pour d'innombrables valeurs de k, le même pixel fera office de bord gauche…

c) Une translation des axes dissipe le flou

Forts de ces observations, les élèves se résolvent (à regret) à changer de stratégie. L'idée d'une translation de la courbe à l'origine (traitée en travaux pratiques) ou d'une translation du repère au bord gauche de l'intervalle, fait son chemin. Les nouvelles équations sont calculées (dans un premier temps, avec de nombreuses erreurs), ainsi que les unités correspondantes. Et là, miracle, une courbe cohérente se dessine à nouveau. Plusieurs valeurs de k sont essayées : à l'écran, les courbes obtenues dans les différents intervalles se ressemblent beaucoup *(figures 7 et 8)*. Sont-elles superposables? Après des "oui" un peu précipités, les élèves réalisent que les intervalles "rétrécissent" à mesure que k augmente : avec les mêmes unités, celle qui correspond à $k = 10002$ serait invisible par rapport à celle obtenue pour $k = 100$! C'est en "étirant" fortement la première (par affinité) dans le sens horizontal qu'on la rend "superposable" à la seconde.



Les élèves poussent le logiciel dans ses retranchements : il cale au-delà de $k = 10^8$. On atteint alors de tous petits détails de la courbe globale (la longueur de l'intervalle vaut dans ce cas $6{,}4\times 10^{-17}$). Il reste donc une tache aveugle au voisinage de 0 : le logiciel n'est d'aucun secours pour déterminer les variations de f sur cet intervalle.

La juxtaposition (mentale) des intervalles obtenus pour les valeurs impaires de k permet de conjecturer les variations de f sur $[3{,}2\times 10^{-9}\ ;\ 1]$. Les élèves entrevoient cette possibilité, mais émettent des doutes sur la démarche : a-t-on vraiment décrit les variations globales de f alors qu'on a parlé que d'UN intervalle $[1/(k+2)\pi\ ;\ 1/k\pi]$? La difficulté à comprendre que k prend toutes les valeurs impaires est considérable. Il faut donner à k différentes valeurs impaires consécutives numériques et juxtaposer concrètement les intervalles pour le doute recule… (il n'est pas sûr qu'il soit vraiment levé, le caractère hésitant des comptes-rendus sur cet aspect laisse songeur!). On atteint ici les limites de l'abstraction dont les élèves de ce niveau sont capables. Mais l'effort fourni leur permet de prendre la mesure de problèmes à venir.

3) *Synthèse*

Qu'ont appris, ou entrevu , les élèves au cours de cette seconde activité ?

Ils ont rencontré deux quantités (ici des suites), qui évoluent vers 0, mais dont le rapport tend vers l'infini avec k! L'une devient négligeable face à l'autre quand k devient très grand. Or, c'est la situation qu'ils vont rencontrer en comparant les termes du second membre dans l'une des définitions de la dérivée : $f(a+h)-f(a)=hf'(a)+h\,\alpha(h)$ ($\alpha(h)$ tend vers 0 avec h).
L'expérience montre leur extrême difficulté à comprendre cette situation : notre activité prépare à y entrer plus facilement.

La notion d'étude "locale" d'une fonction prend ici tout son sens : pour obtenir des tracés, il faut descendre à l'échelle du "tout petit", voire de "l'infiniment petit". Il s'agit pour les élèves d'une véritable rupture de pensée : jusque là, ils travaillent sur des courbes GLOBALES. Il prennent la mesure du prix à payer dans ce changement de regard qui caractérise la classe de Première.

Enfin, l'étude locale permet un retour au point de vue global. Par un effort d'abstraction (très difficile à ce niveau), le segment]0 , 1] est recouvert par une infinité de segments sur lesquel on connaît les variations de f. Belle revanche de la pensée sur la machine…

4 - Conclusion

L'informatique appliquée aux mathématiques peut conduire, à condition d'être bien conçues à des situations dont l'étude génère des retombées scientifiques et pédagogiques considérables.

Le but premier des activités décrites dans cet article consistait à mettre en garde les élèves contre une excessive confiance dans des machines et des logiciels de plus en plus perfectionnés. Ils ne peuvent pas tout!

Pour le montrer, il fallait mettre en scène des situations qui posent un réel problème. *Nécessairement complexes, elles n'auraient jamais été abordées à ce niveau hors de l'environnement informatique* (elles dépassent les compétences théoriques des élèves).Leur étude, rendue possible par l'utilisation d'un traceur de graphes, les amène à réfléchir et à mettre en œuvre des notions dont l'importance théorique et pratique est considérable en mathématiques et en physique. Nous les avons analysées en détail, il est inutile d'y revenir.

Soulignons cependant que pour résoudre les problèmes que révèlent les tracés (ou leur absence) sur l'écran, le retour vers le papier-crayon est déterminant. La méthode par essai-erreur atteint vite ses limites.

La difficulté des notions rencontrées est grande. L'environnement informatique facilite, sur le plan psychologique, la volonté de les affronter. En effet, il ne s'agit pas d'exercices gratuits. *Ils se présentent au cours d'un travail que beaucoup ressentent comme gratifiant* : faire réaliser des tracés par une machine. L'échec les stimule (le travail en binôme y contribue largement) : la réflexion théorique devient un passage obligé vers un succès désiré. Il faut voir l'enthousiasme des élèves lorsqu'après bien des écrans vides ou encombrés de nuages de points, une courbe cohérente est tracée ! L'environnement informatique aide à faire passer l'amère pilule des incontournables difficultés théoriques... Aux enseignants d'imaginer des situations suffisamment riches dans les domaines à explorer.

Mais ne rêvons pas trop. L'environnement informatique, lui non plus, ne peut pas tout sur le plan pédagogique. On l'a compris, la classe dans laquelle se sont déroulées les activités décrites, comporte une majorité d'élèves de bon niveau, curieux d'esprit, prêts à s'étonner, à changer de regard si on les y invite et si on les conduit. Ce n'est pas le cas de toutes les classes, loin s'en faut. D'autres expériences, dans le même environnement ont été des flops retentissants ou des aventures difficiles...

Le choix du logiciel en fonction de l'activité projetée est déterminant. La réflexion sur les ordres de grandeur, capitale dans ces activités, disparaît si on les réalise sur des calculatrices graphiques, qui mettent en page, automatiquement, les tracés. Il est vrai que Graph'x a été conçu et réalisé par des enseignants, qui savent qu'à trop automatiser, on perd le sens.

Dans le contexte de cette classe de Première, le temps passé face à l'écran, à la calculatrice et au papier-crayon a été très utile : les comptes rendus, dont l'article s'est inspiré, montrent que des pas ont été faits dans la compréhension de notions difficiles. Ils révèlent aussi des hésitations et des erreurs sur lesquelles il faudra revenir, sans doute longuement. On ne franchit pas des seuils épistémologiques sans trébucher et sans y repasser à bien des reprises.

Bibliographie

[1] Régis DEBRAY, *Vie et mort de l'image. Une histoire du regard en occident*. Folio essais 94 (voir note de lecture dans Repère-IREM n°22, p.43/44, janvier 1996).

[2] G. KUNTZ, *L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a*. Repères-IREM n°11 - Avril 1993.

[3] G. KUNTZ, *Saut d'obstacle*, Repère-IREM n°22, Janvier 1996.